REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO

PLANA IX 1/5

Note sur le 1er Cor. de Lemme III. Pages 3 et 4

Pour démontrer analytiquement le 1er Cor. Soient

$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x);\quad Y-y'=\frac{dy'}{dx'}(X-x')$$

les équations des deux tangentes. Pour avoir les coordonnées du point de leur intersection on fera $\frac{dy}{dx}=q$ $\frac{dy'}{dx'}=q'$, et les deux équations

$$X-x=\frac{Y-y}{q};\quad X-x'=\frac{Y-y'}{q'}$$

donneront en les éliminant

$$Y=\frac{qy'-q'y+qq'(x-x')}{q-q'}$$

l'équation soit $y^2=4D^2+4Dx$ de la parabole; l'origine étant au foyer: on aura $q=\frac{2D}{y}$; pendant

$$Y=y'+y+\frac{4D(x-x')}{2(y'-y)}=y'+y-\frac{(y'+y)}{2}$$

enfin $Y=\frac{y+y'}{2}$. D'après cela l'équation $Y-y=\frac{2D}{y}(X-x)$ donne $X=\frac{yy'}{4D}-D$.

Il suit de là que

$$X^2+Y^2=\left(\frac{y+y'}{2}\right)^2+\left(\frac{yy'}{4D}-D\right)^2$$

ou bien

$$X^2+Y^2=D\left(\sqrt{D+x}+\sqrt{D+x'}\right)^2+\left(\sqrt{D+x}\sqrt{D+x'}-D\right)^2$$

d'où l'on tire

$$X^2+Y^2=4D^2+xx'+2D(x+x')$$

$$X^2+Y^2=(2D+x)(2D+x').$$

Mais nous avons

$$x^2+y^2=(2D+x)^2 ; \quad x'^2+y'^2=(2D+x')^2$$
$$=r^2 \qquad\qquad =r'^2$$

partant

$$FR=\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{rr'}.$$

Soit A l'angle que FR fait avec l'axe des x qui est celui de la parabole : nous avons

$$\tang A=\frac{Y}{X}=\frac{\frac{y}{2D}+\frac{y'}{2D}}{\frac{yy'}{2D.2D}-1}.$$

Soit $\tang\varphi=\frac{2D}{y}$; $\tang\varphi'=\frac{2D}{y'}$

il viendra $\tang A=\tang(\varphi+\varphi')$:
donc $A=\varphi+\varphi'=\frac{\psi+\psi'}{2}$, en nommant ψ et ψ' les angles que r et r' font avec l'axe.

Donc la ligne FR partage en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs r et r'.

Dans cet ouvrage les deux lettres m et n valent

$m = \frac{1}{2}\sqrt{f}$; $n = \frac{2}{\sqrt{f}}$

$f = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$; a étant la distance moyenne de la Terre au Soleil. L'auteur fait parfois $a = 10^5$ et d'autrefois $a = 1$. Voyez page 34.

Log. $m = 7,9345521$ ⎫ $a = 1$
Log $n = 2,0654479$ ⎭

La table 1ère est la table de l'équation

$z^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3\sqrt{f}} = T$ Log $\frac{2}{3\sqrt{f}} = 1,4378117$

I. H. LAMBERT
ACADEMIAE SCIENTIARVM ELECTORALIS BOICAE MEMBRI ET PROFESSORIS HONORARII, SOCIETATIS PHYSICO-MEDICAE BASILEENSIS MEMBRI, REGIAE SOCIETATI SCIENTIARVM GOETTINGENSI COMMERCIO LITERARIO ADIVNCTI

INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM PROPRIETATES.

ACCADEMIA R. DELLE SCIENZE DI TORINO

AVGVSTAE VINDELICORVM,
SVMTIBVS EBERHARDI KLETT VIDVAE.
MDCCLXI.

PRAEFATIO.

Plurima ſupereſſe videntur, Matheſcos adplicatae capita, quae etſi iam paſſim ab Auctoribus ſint pertractata, attamen ab eo fine, ad quem erant perducenda, immenſum quantum diſtant. Duo potiſſimum ſunt, quae moram nectere poſſe, primo quidem intuitu videntur. Quodſi enim theoria vel maxime ob praxin excolatur, ſaepiſſime citatiori paſſu, illa neglecta vel obiter tractata, ad hanc properamus, eamque ingredimur viam, quae primo ſeſe nobis offert, nulla habita breuitatis ambituumue ratione. Porro & ipſa

theoria, quam curatius euoluendam eſſe proſpicimus, haud raro ſpeciem problematis intricatiſſimi prae ſe fert, atque cum eam leuiter adſpicimus vel e limine tantum ſalutamus, ita videtur complexa & ardua, ut & eos qui laboris ſunt patientiſſimi & quos in noua & elegantiora fert animus impiger, deterrere poſſit. Neſcio tamen quaenam ſubinde felicioris ſucceſſus ſpes intuentem penitiuſque rimantem arrideat, ut cum labore improbo rem adgreditur, ſpem ipſe euentus ſuperet, certe hic viam ſternat iis, qui ad veram abſolutamque metam pertingere geſtiunt.

Quae ſeſe mihi obtulerunt ſpecimina, utramque hanc difficultatis cauſſam luce ſua colluſtrantia, his edoctus ſum, problema quoduis intricatius peculiarem ſibique propriam requirere methodum, peculiaremque artificiorum heuriſticorum combinationem, quae niſi iunctim ſumta & ſuo quaeque ordine meditanti ſuccurrant, ſpem elegantioris ſolutionis fallunt, aut nonniſi per prolixiores ambages, eo quo deueniendum erat, conducunt. Accedit quandoque, ut ſolutio quaeſtionis vel ideo incaſſum tentetur, quod verum rei momentum adhucdum latet, atque ſaepiſſime,

quid

quid ſibi velit id quod vel quaerimus vel iam inuenimus, menti ſeſe ſubducit. Hoc vero ipſo praetergredimur id in quo cardo rei vertitur. Quodſi porro theoria praeſtruenda reuera deprehendatur nimis complexa difficultatisque plena, expedit utique caſum euoluere ſpecialiorem magisque concinnum, quo facto haud raro res praeter exſpectationem ita cadit, ut elegantiores proprietates, quas caſus iſte nobis offert, leui mutatione facta uniuerſalius patere atque ad caſus omnes extendi poſſe facili negotio peruideamus. Contra ea haud raro huiuſcemodi theoria difficilioris ſpeciem mentitur, re vero actu tentata longe ſeſe oſtendit faciliorem. Denique caſus iſte, quem curatius examinare propoſitum eſt, pluries multifariis circumſtantiis a re ipſa prorſus alienis ita videtur inuolutus, ut an iſtae remoueri tutoque praetermitti queant, primo quidem obtutu nequaquam liqueſcat, re autem curatius perluſtrata non modo deprehendantur alienae verum & quandoque mere arbitrariae.

Exempla, quibus his aſſertionibus lux adfundatur, aliunde in medium heic proferre ſuperfluum duco, quippe ſingula veluti

 luti

luti in ſummam collecta in hoc opuſculo occurrunt, in quo *Proprietates inſigniores orbitae cometarum* eodem prorſus modo euolutas dedi, quo tribus abhinc annis in tractatu *Les proprietés remarquables de la route de la lumiere par les airs*, ſemitas luminis per plura media diaphana ſphaerica eaque concentrica perueſtigaui.

Plures utique iam proſtant methodi orbitam cometae ex datis tribus ipſius locis geocentricis, vel tentando, vel conſtructione, vel denique ſubducto calculo definiendi, unde hoc certe reſpectu de crambe bis, ter vel centies recocta ſermonem heic eſſe iniiciendum iudicabunt, qui norunt, quaenam veſtigia mihi hac in re erant premenda. Illuſtria ſane ſi quae vel maxime hoc nomen merentur, at ni fallor veſtigia tantum, quae a primis fontibus veluti per ſaltum eo deducebant, quo, praeſtructa enucleatiori theoria, via con. cinniori deueniendum fuiſſet. Nota iam erant prima quibus cetera ſuperſtruerentur principia polique iura, at ab ipſo hoc pro. blemate, quo ex tribus obſeruationibus eruenda erat cometae orbita, quodque ſcopi primarii vices ſuſtinet, nimis iſta videbantur remota. Mirum tamen videri

pote-

poterat, an elegantiſſimae illae proprietates, quibus gaudent ſectiones conicae, & in quibus eruendis ſummi geometrae veluti certatim ab antiquiſſimis retro temporibus operam collocarunt indefeſſam, prorſus inutiles atque ſuperfluae forent, ſimul ac cometarum orbitis eſſent adplicandae? Res ipſa utique tentamine digna, ſpes haud inana, at ſuperauit euentus, quippe elegantiores iſtae proprietates, dum cometarum orbitis ita adplicantur, ut areae ſubſtituatur tempus numeris abſolutis definitum, quantumuis iam ſint concinnae, concinniores euadunt. Has iam ita in hoc opuſculo congeſſi, ut eas poſitiones, quae independenter ab orbitis cometarum ſectiones conicas in ſe ſpectatas concernunt, quo uniuerſalius paterent, lemmatum inſtar proponerem, eaſque hac ratione a ceteris, quae ad euoluendas orbitarum proprietates quicquam facerent, diſtinguerem. Nouis iam nota interſerere e re eſſe videbatur, quo clarius eluceſceret poſitionum nexus. Ex nouis tamen ea tantum in medium protuli, quae elegantiora eſſent & uniuerſaliora, quibuſque in apricum productis haud deeſſent, quae ulterius progreſſuro viam oſtendere poſſent, quaeque

ſubin-

ſubinde indicaui. Huc referas meditata de proiectione orthographica in planum eccliptices vel aliud quoduis utiliter ipſi ſubſtituendum. Similiter Lemmata quaedam in prima Sectione ipſi tractationi praefixa, & quae in Sectione IV. de differentia orbitarum parabolicarum, ellipticarum & hyperbolicarum breuibus diſſerui. Orbitam potiſſimum parabolicam curatius perluſtraui, atque theoremata & problemata ad eam ſpectantia luce ſua ita videbantur conſpicua, ut quae plerumque illuſtrationis ergo adferuntur exempla, hic deeſſe poſſent abſque ullo claritatis detrimento. Orbitas vero ellipticas in ultima Sectione eatenus tantum perueſtigavi, quatenus palam fieret, qua ratione elegantiſſimae orbitae parabolicae proprietates ceteris quoque ſectionibus conicis eſſent adplicabiles. Hanc vero prouinciam ſi quis in ſe ſuſcipere operae pretium eſſe ducat, utiliter in ſubſidium vocabit, quae ſummus EVLERVS eximia qua pollet ingenii ſagacitate in *Theoria motuum Planetarum & Cometarum* demonſtrata dedit.

PRO-

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO I.

Praeſtruuntur Lemmata uniuerſaliora, quibus indoles Parabolae, variaeque ipſius proprietates in theoria motus Cometarum uſui futurae exponuntur.

LEMMA I.

§. 1. *Sit AF axis, F focus parabolae AN,* Fig. 1. *ducto radio vectore quocunque FN, & tangente NT, erit angulus* $TNF = \frac{1}{2}.NFB$.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae eſt $FT = FN$, adeoque $FTN = TNF$. Sed $FTN + TNF = NFB$, quare $TNF = \frac{1}{2} NFB$.

LEMMA II.

§. 2. *E vertice A erigatur AS ad axin normalis, quae tangentem TN ſecet in S, ducatur FS, dico angulum AFN eſſe biſectum, & triangula AFS, SFN eſſe ſimilia.*

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae eſt TS=SN, FT=FN, adeoque angulus TFS=SFN. Porro FS eſt ad tangentem TN normalis, adeoque triangulum FSN rectangulum. Sed ob angulum SAF rectum, triangulum FAS quoque eſt rectangulum, unde ob angulos AFS, SFN aequales, utrumque iiſdem gaudet angulis. Sunt ergo ſimilia.

COROLLARIVM I.

§. 3. Erit ergo AF:FS=FS:FN. *Quare FS eſt media proportionalis inter FA & FN.*

COROLLARIVM II.

§. 4. Cum ſit ASF=SNF, erit AF=SF. ſin ASF=SF. ſin SNF=FN. ſin FNT[2]. *Quare dato radio vectore FN & angulo FNT, facillime dabitur diſtantia foci a vertice AF, & ſitus axeos.*

COROLLARIVM III.

§. 5. Cum angulus FSN conſtanter ſit rectus, foco F & recta AS poſitione datis, ope normae, foco F & quibusuis punctis S adplicandae *dicto citius ducentur quotuis tangentes SN, parabolae ambitum vel ſua ſponte delineaturae.*

SCHOLION.

§. 6. Propoſitiones hae longe uniuerſalius patent, atque paucis mutatis quibuſuis ſectionibus

nibus conicis adplicantur. Quod de parabola ſequentem in modum palam fiet.

LEMMA III.

§. 7. *Si ad duo puncta parabolae N, M ducantur tangentes NR, RM, atque e foco F agantur rectae FN, FM, FR, triangula NFR, RFM erunt ſimilia, & producta tangente MR in T, angulus TRN erit =NFR=RFM.* Fig. 1.

DEMONSTRATIO.

E vertice A erigatur AT ad axin AF normalis, producantur tangentes RM, RN in T & S, atque agantur rectae FS, FT. Quoniam anguli FSR, FTR ſunt recti (§. 2.) eidemque rectae FR inſiſtunt, puncta F, S, T, R erunt in peripheria circuli, cuius diameter FR. Quare FST + FRT = 180°, adeoque ASF = TRF =SNF. Unde cum triangula iſta ſint ſimilia, erit quoque SFN = TFR. Quare SFT = NFR =SRT. Eſt vero (§. 1.) SNF = $\frac{1}{2}$NFB, TMF = $\frac{1}{2}$MFB, unde SNF − TMF = $\frac{1}{2}$NFM. Sed per naturam quadranguli eſt SNF − TMF = NFM − TRS, adeoque NFM − TRS = $\frac{1}{2}$NFM, ſiue TRS = $\frac{1}{2}$NFM = NFR. Quare recta FR angulum NFM biſecat. Cumque ſit SNF = TRF, erit quoque FNR = FRM, adeoque in triangulis FNR, FRM anguli reſpondentes ſunt aequales, quare triangula ipſa ſunt ſimilia.

COROLLARIVM I.

§. 8. Erit ergo FN:FR=FR:FM. *Adeoque FR eſt media proportionalis inter FN, FM.* Unde FN:FR=FR:FM=$\sqrt{}$FN:$\sqrt{}$FM.

COROLLARIVM II.

§. 9. Datis ergo foco F & duobus parabolae punctis N, M, ob angulum NFM biſectum, & FR=$\sqrt{}$(FN.FM), facillime ducentur tangentes RNS, MRT, atque ad has normales FS, FT, proinde & TSA, & FA.

COROLLARIVM III.

§. 10. Similiter dato triangulo FNM dabitur triangulum FRM, quare & angulus RMF, eritque AF=FM. ſin RMF^2 (§. 4.)

COROLLARIVM IV.

§. 11. Cum ſit FRM=FNR, manente recta FN & tangente NR, angulus FRM erit conſtans, quaecunque ſit rectae FM ad FN inclinatio. Uniuerſalius itaque patet methodus parabolam conſtruendi ſupra (§. 5.) expoſita.

COROLLARIVM V.

§. 12. Ducta chorda NM, erit ſumma angulorum RNM+RMN=TRS=NFR.

COROLLARIVM VI.

§. 13. Porro cum ſit

NR:RM=ſin RMN:ſin RNM

& ob

& ob angulum NFM biſectum

$$NR : RM = \sin RMF : \sin RNF$$

erit

$$\sin RMN : \sin RNM = \sin RMF : \sin RNF$$

COROLLARIVM VII.

§. 14. Ob triangula FNR, FRM ſimilia, eſt

$$NR : RM = FN : FR$$

Sed (§. 8.)

$$FN : FR = \sqrt{FN} : \sqrt{FM}$$

Quare (§. 13.)

$$\sqrt{FN} : \sqrt{FM} = \sin RMF : \sin RNF$$

LEMMA IV.

§. 15. *Si ad tria parabolae puncta L, M, N* Fig. 3. *ducantur tangentes LR, RN, PMQ, puncta interſectionis P, R, Q una cum foco F erunt in peripheria circuli.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim (§. 7.)

$$TRL = \tfrac{1}{2}.LFN = \tfrac{1}{2}LFM + {}^{1}MFN$$

Sed (§. cit.)

$$\tfrac{1}{2}.LFM = PFM$$
$$\tfrac{1}{2}.MFN = MFQ$$

Quare

$$TRL = PFM + MFQ = PFQ.$$

Unde in quadrangulo FPRQ anguli oppoſiti $PFQ + PRQ = 180°$. Quae proprietas eſt quadrilateri circulo inſcripti, conſtat ergo propoſitum.

COROLLARIVM I.

§. 16. Tribus itaque parabolae tangentibus poſitione datis, per puncta interſectionis P, Q, R duci poterit circulus QRPF, qui per focum parabolae tranſeat.

COROLLARIVM II.

§. 17. Proinde ſi poſitione dentur quatuor parabolae tangentes, duo deſcribentur circuli, quorum interſectio focum parabolae exhibeat.

LEMMA V.

§. 18. *Manente utraque tangente LR, RN, ſitus tertiae PMQ varietur utcunque, ratio inter partes abſciſſas LP, RQ erit conſtans.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim

$$LFP = \tfrac{1}{2} LFM$$
$$LFR = \tfrac{1}{2} LFN$$

unde

$$PFR = \tfrac{1}{2} MFN = MFQ$$

adeoque addendo partem communem RFM, erit

$$RFQ = PFM = LFP$$

Sed eſt quoque

$$PLF = QRF$$

unde triangula LPF, RQF ſunt ſimilia, adeoque ratio inter LP & RQ conſtans.

COROLLARIVM I.

§. 19. Erit ergo

$$LP:RQ = LR:RN = LF:RF$$

ſiue

$$LP:RQ = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}$$

COROLLARIVM II.

§. 20. Hinc quoque erit

$$RP:QN = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}$$

COROLLARIVM III.

§. 21. Quare &

$$LR = PR + \frac{RQ.LR}{RN}$$

ſiue

$$\frac{PR}{LR} + \frac{RQ}{NR} = 1.$$

COROLLARIVM IV.

§. 22. Cum ſit

$$PFM = LFP$$
$$PFR = MFQ$$

erit addendo $PFQ = LFR = \frac{1}{2} LFM$
Eſt vero quoque $FPM = FLP = FRQ$
quare triangula LRF, RNF, PFQ ſunt ſimilia.

COROLARIVM V.

§. 23. Quicunque ergo ſit ſitus tangentis PMF, manente utraque tangente LR, RN, ratio inter latera FP, PQ, FQ erit conſtans.

LEMMA VI.

Fig.4. §. 24. *Tribus parabolae tangentibus Rr, RQ, rq poſitione datis, ſi ducatur quarta quaecunque qPQ, ratio inter partes abſciſſas qP, PQ erit conſtans.*

DEMONSTRATIO.

Etenim per corollarium quintum Lemmatis praecedentis (§. 23.) ratio inter PF, PQ nec non inter PF, Pq eſt conſtans, quare & ratio inter PQ, Pq conſtans erit.

LEMMA VII. PROBLEMA I.

§. 25. *Tribus rectis Rr, RQ, rq poſitione datis, ducenda ſit quarta qQ talis ut partes abſciſſae qP, PQ ſint in ratione data.*

SOLVTIO.

Problema hoc indeterminatum eſt. At ſi unica recta qQ ducta ſit conditioni ſatisfaciens, dabuntur quatuor parabolae tangentes, quarum ope definietur ſitus foci F per §. 17. atque proinde conſtruetur ipſa parabola per §. 9. ſiue quotlibet eius tangentes per §. 5. Cunctae vero vi lemmatis ſexti conditioni problematis ſatisfacient.

Aliter.

Cum ſit (§. 24.)

$$qP : PQ = SR : RM = rm : Sr$$

erit componendo

$$SR : SM = rm : mS$$

ſiue

ſiue

$$SM : Sm = SR : rm$$

Sed eſt quoqúe (§. 19.)

$$SM : Sm = QM : Sq$$

Quare

$$SR : rm = QM : Sq.$$

Data itaque ratione inter qP, PQ per analogiam primam dabitur RM & rm, adeoque ſitus punctorum contactus M, m. Aſſumta itaque abſciſſa qualibet QM, erit haec ad Sq in ratione conſtante Sr : rm. Unde pro quouis puncto Q dabitur reſpondens q, quo duci poſſit recta qQ.

Aliter.

Cum ſit

$$Pq : \text{ſin}\, qrP = qr : \text{ſin.}\, qPr$$
$$PQ : \text{ſin}\, QRP = QR : \text{ſin}\, QPR$$

&

$$qPr = QPR$$

erit

$$Pq : PQ = \frac{qr \,.\, \text{ſin}\, qrP}{\text{ſin}\, qPr} : \frac{QR \,.\, \text{ſin}\, QRP}{\text{ſin}\, qPr}$$

Quare

$$\frac{PQ}{Pq} \,.\, \text{ſin}\, qrP : \text{ſin} QRP = QR : qr = \frac{PQ}{Pq} : \frac{Sr}{SR}$$

Aſſumta itaque QR, dabitur quoque qr, & viciſſim.

LEMMA VIII. PROBLEMA II.

§. 26. *Duobus parabolae punctis N, M una cum foco F poſitione datis conſtruere parabolam.* Fig. 5.

 SOLV-

SOLVTIO.

Diametro NM deſcribatur ſemicirculus MVN, fiat $Fn = FN$, quo habeatur differentia nM. Haec transferatur ex N in V, ut chorda NV ſit $= nM$. Ducatur MVH, atque ad hanc ex foco F demittatur normalis FH, erit haec axis parabolae. Denique fiat $AF = \frac{1}{2}(FM - FH)$ eritque A parabolae vertex. His vero datis facile abſoluetur parabolae conſtructio.

DEMONSTRATIO.

Per naturam parabolae eſt

$$FM = FH + 2AF$$
$$FN = FK + 2AF$$

Quare differentia

$$FM - FN = FH - FK = HK = NV$$

Sed ob angulum NVM rectum, chorda NM ſubtendit ſemicirculum NVM, & NV eſt axi AH parallela.

SCHOLION.

§. 27. Aliam huius problematis ſolutionem iam ſupra indicauimus (§. 9.)

LEMMA IX. PROBLEMA III.

§. 28. *Dato triangulo NFM inuenire aream ſegmenti NQM.*

SOLVTIO.

Ponatur parabolae parameter $= p$, porro

$$AH = x \qquad HM = y$$
$$AK = \xi \qquad KN = \eta$$

erit

erit area

$$\text{ſegmenti AMH} = \tfrac{2}{3}xy$$
$$\text{ſegmenti ANK} = \tfrac{2}{3}\xi\eta$$
$$\text{quadrilateri KNMH} = \tfrac{1}{2}(x-\xi).(\eta+y)$$

Quare area ſegmenti NQM erit

$$= \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{2}{3}\xi\eta - \tfrac{1}{2}(x-\xi).(y+\eta)$$

ſiue debita reductione facta

$$= \tfrac{1}{6}(xy - \xi\eta - 3x\eta + 3\xi y)$$

At vero eſt

$$x = y^2 : p$$
$$\xi = \eta^2 : p$$

Quare ſubſtituendo erit area ſegmenti NQM

$$B = \frac{1}{6p}(y^3 - 3y^2\eta + 3y\eta^2 - \eta^3)$$

ſiue

$$B = (y-\eta)^3 : 6p = \text{MV}^3 : 24\text{AF}$$

Pendet itaque area ſegmenti NQM unice a differentia ordinatarum KN, HM, & diſtantia foci a vertice AF.

Sit iam

$$\text{FM} = a$$
$$\text{FN} = b$$
$$\text{NFM} = 2c$$
$$\text{NM} = k$$

erit

$$2ab \operatorname{coſ} 2c = a^2 + b^2 - k^2$$

ſed

$$\operatorname{coſ} 2c = 1 - 2 \operatorname{ſin} c^2$$

unde

$$4ab \operatorname{ſin} c^2 = k^2 - (a-b)^2 = \text{MV}^2$$
$$\text{MV} = 2 \operatorname{ſin} c \sqrt{ab}$$

Porro eſt (§. 8.)

$$\text{FR} = \sqrt{ab}$$

Fig. 2.

Unde

Unde

$$RW = \text{ſin}\, c \,.\, \sqrt{ab}$$
$$MW = a - \text{coſ}\, c \,.\, \sqrt{ab}$$
$$\text{ſin}\, RMW^2 = b\, \text{ſin}\, c^2 : (a + b - 2\,\text{coſ}\, c \,.\, \sqrt{ab})$$

Sed (§. 4.)

$$AF = FM \,.\, \text{ſin}\, RMW^2$$

Quare

$$AF = \frac{ab \,.\, \text{ſin}\, c^2}{a + b - 2\,\text{coſ}\, c \,.\, \sqrt{ab}}$$

Eſt vero

Fig. 5. $$B = MV^3 : 24\, AF$$

Quare ſubſtituendo, erit

$$B = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \text{ſin}\, c\, (a + b - 2\sqrt{ab} \,.\, \text{coſ}\, c)$$

COROLLARIVM.

§. 29. Facile iam hinc habebitur area ſectoris parabolici NFMQ, ſi ſegmento NQM addatur area trianguli NFM, quae eſt

$$= \tfrac{1}{2} ab \,.\, \text{ſin}\, 2c = ab\, \text{ſin}\, c \,.\, \text{coſ}\, c$$

Quare dicta area ſectoris NFMQ $= A$, erit

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \text{ſin}\, c \,.\, (a + b) + \tfrac{1}{3} ab \,.\, \text{ſin}\, c \,.\, \text{coſ}\, c$$

ſiue

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \text{ſin}\, c\, (a + b + \sqrt{ab} \,.\, \text{coſ}\, c)$$

LEMMA X. PROBLEMA IIII.

§. 30. *Datis lateribus trianguli NFM inuenire diſtantiam foci F a vertice A, & aream ſectoris parabolici NFM.*

SOLVTIO.

Per formulas trigonometricas eſt

$$4ab\, \text{ſin}\, c^2 = (k + a - b) \,.\, (k - a + b) = k^2 - (a - b)^2$$
$$4ab\, \text{coſ}\, c^2 = (k + a + b) \,.\, (a + b - k) = (a + b)^2 - k^2$$

Quare

Quare cum ſit (§. 28. 29.)

$$AF = ab.\sin c^2 : (a+b-2\cos c.\sqrt{ab})$$
$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab}.\sin c\,(a+b+\cos c.\sqrt{ab})$$

erit ſubſtitutione facta

$$AF = \frac{k^2-(a-b)^2}{4[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$
$$A = \tfrac{1}{6}.\sqrt{(k^2-(a-b)^2)}.[a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]$$

COROLLARIVM I.

§. 31. Cum ſit

$$(a+b)-\sqrt{((a+b)^2-k^2)} = \frac{k^2}{(a+b)+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}}$$

erit quoque

$$AF = (k^2-(a-b)^2).[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}] : 4k^2$$

COROLLARIVM II.

§. 32. Si angulus $c = \frac{1}{2}$ NFM fuerit 90°, erit $k = a+b$, quare hoc caſu erit

$$AF = \frac{ab}{a+b} = ab : k$$
$$A = \tfrac{1}{3}(a+b)\sqrt{ab} = \tfrac{1}{3}k\sqrt{ab}$$

SCHOLION.

§. 33. Literae *a*, *b*, *c*, *k*, quibus in utroque problemate praecedente uſi ſumus, conſtanter eundem retinebunt ſignificatum, quem hic ipſis tribuimus. Quod hic ideo notandum, quo ſuperflua reddatur eiuſdem denominationis continua repetitio.

LEM-

LEMMA XI. PROBLEMA V.

Fig. 2. § 34. *Datis lateribus trianguli NFM invenire angulum RMF vel SNF.*

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 28.)

$$\text{ſin}\,RMF^2 = b\,\text{ſin}\,c^2 : (a+b-2\,\text{coſ}\,c\,\sqrt{ab})$$

atque (§. 30.)

$$4ab\,\text{ſin}\,c^2 = k^2-(a-b)^2$$

$$4ab\,\text{coſ}\,c^2 = (a+b)^2-k^2$$

erit ſubſtitutione facta

$$\text{ſin}\,RMF^2 = \frac{k^2-(a-b)^2}{4a[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

ſimilique ratione (§. 14.)

$$\text{ſin}\,SNF^2 = \frac{k^2-(a-b)^2}{4b[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

COROLLARIVM I.

§. 35. Cum ſit (§. 1.)

$$MFB = 2RMF$$

erit

$$\text{coſ}\,MFB = 1-2\,\text{ſin}\,RMF^2$$

adeoque

$$\text{coſ}\,MFB = 1-\frac{k^2-(a-b)^2}{2a[a+b-\sqrt{(a+b)^2-k^2})]}$$

COROLLARIVM II.

§. 36. Si angulus NFM euadat $=180°$, erit $a+b=k$, adeoque

$$\text{coſ}\,MFB = 1-\frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

SCHO-

SCHOLION.

§. 37. Alio inſuper modo exprimetur angulus RMF ſimulque & angulus RMN per a, b, c, ſi quaeratur utriuſque cotangens. Eſt enim FRM $= 180° - c -$ RMF. Quare

$$FR : FM = \text{ſin}\, FRM : (\text{ſin}\, FRM + c)$$

Sed eſt (§. 8.)

$$FR : FM = \surd b : \surd a$$

Dicto itaque angulo RMF $= v$, erit

$$\surd b : \surd a = \text{ſin}\, v : \text{ſin}\,(c + v)$$

ſiue ob

$$\text{ſin}\,(c + v) = \text{ſin}\, c . \text{coſ}\, v + \text{coſ}\, c . \text{ſin}\, v$$

$$\surd b : \surd a = \text{ſin}\, v : (\text{ſin}\, c . \text{coſ}\, v + \text{coſ}\, c . \text{ſin}\, v)$$

$$\surd b : \surd a = 1 : (\text{ſin}\, c . \cot v + \text{coſ}\, c)$$

Unde

$$\cot v = \surd \frac{a}{b} . \text{coſec}\, c - \cot c.$$

Porro dicto angulo FMN $= \omega$, ob TRN $=$ RFM $= c$ (§. 7.) crit

$$MNR = c - \omega$$

quare

$$NR : RM = \text{ſin}\, \omega : \text{ſin}\,(c - \omega)$$

Eſt vero (§. 14.)

$$NR : RM = \surd b : \surd a$$

Quare

$$\surd b : \surd a = \text{ſin}\, \omega : \text{ſin}\,(c - \omega)$$

ſiue

$$\surd b : \surd a = \text{ſin}\, \omega : (\text{ſin}\, c . \text{coſ}\, \omega - \text{coſ}\, c . \text{ſin}\, \omega)$$

Unde erit

$$\cot \omega = \text{coſec}\, c . \surd \frac{a}{b} + \cot c$$

Cum-

Cumque ſit

$$\cot v = \operatorname{coſec} c . \sqrt{\frac{a}{b}} - \cot c$$

patet, mutato tantum ſigno, eandem formulam exhibere cotangentem utriuſque anguli v, ω ſiue RMF, RMN.

LEMMA XII.

Fig.6. §. 38. *Biſecta chorda NM in G, ducatur WGR axi AH parallela, ducantur porro tangentes NR, RM, atque inſuper recta FQ e foco F, erit RQ = QG = QE.*

DEMONSTRATIO.

Producta tangente NR in P, agatur MP axi parallela, per naturam parabolae erit

$$RQ : PM = NR^2 : NP^2$$

At vero

$$NR : NP = NG : NM = 1 : 2$$

Quare

$$RQ : PM = 1 : 4$$

Sed

$$RG : PM = 1 : 2$$

Quare

$$RQ : RG = 1 : 2$$

adeoque

$$RQ = QG$$

Porro recta, quae parabolam in Q tangit, chordae NM eſt parallela, atque ad rectas FQ, QW ſub eodem angulo inclinata, unde erit

$$QEG = QGE$$

adeoque

$$QE = QG = RQ.$$

SCHO-

SCHOLION.

§. 39. Cum QW ſit parabolae diameter, dabitur relatio inter FQ, QG, NM, eritque

$$NM^2 = 16.FQ.QG.$$

Similiter erit

$$NP^2 = 16.FN.QR = 16.FN.QG$$

adeoque

$$NP:NM = \sqrt{FN}:\sqrt{FQ}$$

ſiue

$$NR:NG = \sqrt{FN}:\sqrt{FQ}$$

LEMMA XIII.

§. 40. *Si per medium chordae G ducatur ordinata IGg ad axin normalis, atque iungatur gF, erit* $gF = (FN + FM):2$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim

$$Fg - FN = KN$$
$$FM - Fg = KV = KN$$

adeoque

$$Fg - FN = FM - Fg$$

ſiue

$$Fg = \frac{FN + FM}{2}$$

SCHOLION.

§. 41. Lemma hoc latius patet, atque ſingulis ſectionibus conicis adplicabile eſt.

LEMMA XIV.

§. 42. *Ductis rectis FQ, QG, Fg ut in utroque Lemmate praecedente, erit* $Fg = FQ + QG$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim

$$GW = IH = FM - Fg$$
$$QW = FM - FQ$$

Quare ſubtrahendo

$$QW - GW = Fg - FQ = QG$$

adeoque

$$Fg = FQ + QG.$$

COROLLARIVM.

§. 43. Ob $QE = QG$ (§. 38.) erit quoque

$$Fg = FQ + QE$$

LEMMA XV. PROBLEMA VI.

§. 44. *Datis lateribus trianguli FNM, inuenire diſtantiam FQ ſiue initii diametri QW a foco F.*

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 42. 40.)

$$Fg = FQ + QG = \frac{FN + FM}{2}$$

atque porro (§. 39.)

$$NM^2 = 16 . FQ . QG$$

erit

$$FQ + \frac{NM^2}{16 . FQ} = \frac{FN + FM}{2}$$

Dicta

Dicta itaque $FQ = q$ erit

$$q = \frac{a+b}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

SCHOLION.

§. 45. Mutato ſigno eadem formula dabit QE, eritque

$$QE = QG = \frac{a+b}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

COROLLARIUM I.

§. 46. Hinc erit

$$FQ - QE = \tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]} = FE$$

COROLLARIUM II.

§. 47. Eſt vero (§. 30.)

$$(a+b)^2 - k^2 = 4ab.\mathrm{coſ}c^2$$

quare

$$FE = \sqrt{ab}.\mathrm{coſ}c = FR.\mathrm{coſ}RFM.$$

LEMMA XVI.

§. 48. *Ducta RL ad FM normali, erit FL=FE, & RL=GK.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim (§. 8.)

$$FR = \sqrt{ab}$$
$$RFM = c$$

adeoque

$$FL = \sqrt{ab}.\mathrm{coſ}c$$
$$RL = \sqrt{ab}.\mathrm{ſin}\,c$$

Sed (§. 30. 47.)

$$\sqrt{ab}.\,\text{ſin}\, c = \tfrac{1}{2}\sqrt{(k^2-(a-b)^2)} = \tfrac{1}{2}\text{MV} = \text{GK}$$

$$\sqrt{ab}.\,\text{coſ}\, c = \text{FE}$$

Quare

$$\text{RL} = \text{GK}$$
$$\text{FL} = \text{FE}$$

LEMMA XVII.

Fig. 7. §. 49. *Si tria puncta parabolae N, Q, M, una cum foco F nectantur rectis FN, FQ, FM, NM, NQ, QM, triangula NFQ, QFM erunt in ratione ſimplici abſciſſarum NE, EM, & ſegmenta NMQ, NQ, QM erunt in ratione triplicata rectarum NM, NG, GM, ſi QG ſit axi AF parallela.*

DEMONSTRATIO.

Etenim triangula NQE, QEM ſunt aeque alta, ob communem verticem Q, quare eorum areae ſunt ut baſes NE, EM. Similiter triangula NFE, EFM ſunt aeque alta ob communem verticem F, quare eorum areae itidem ſunt ut baſes NE, EM. erit ergo componendo

$$\triangle\text{NFQ} : \triangle\text{FQM} = \text{NE} : \text{EM}$$

Porro ducta NV axi parallela, demiſſaque ordinata MV erit (§. 28.) area ſegmenti

$$\text{NMQ} = \text{MV}^3 : 24\,\text{AF}$$
$$\text{NQ} = \text{VW}^3 : 24\,\text{AF}$$
$$\text{QM} = \text{MW}^3 : 24\,\text{AF}$$

Quare

$$\text{NMQ} : \text{MV}^3 = \text{NQ} : \text{VW}^3 = \text{QM} : \text{MW}^3$$

ſiue areae ſegmentorum NMQ, NQ, QM ſunt in ratione triplicata abſciſſarum MV, VW, MW.

MW. Sunt vero hae abſciſſae in ratione abſciſſarum NM, NG, GM. Conſtat ergo propoſitum.

SCHOLION.

§. 50. Quodſi angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat, ſegmenta NQ, QM ratione triangulorum NFQ, QFM, quibus adiacent ſunt paruitatis contemnendae, quare ſectores NFQ, QFM erunt proxime in ratione abſciſſarum NE, EM, chordae quae arcum integrum NM ſubtendit.

LEMMA XVIII. PROBLEMA VII.

§. 51. *Quatuor rectis BL, BI, DK, DH poſitione datis, ducere quintam LH talem, ut partes abciſſae HI, IK, KL ſint in ratione data.* Fig. 8.

SOLVTIO.

Sumto triangulo ABC, quod formant rectae puncta I, K, L ſecturae atque fiat KI : IH = AB : Be, porro KL : KH = BC : Cg ſiue LI : IH = AC : Cf; hinc dabuntur puncta e, f, g in eadem recta ſita. Producatur igitur efg in H. Porro fiat HD : DM = HK : KI, unde dabitur punctum M. Ducatur porro MI ipſi DK parallela, atque recta per HI ducta erit recta quaeſita.

Aliter.

Per trigonometriam erit

$$\text{ſin } CKI : AL = \text{ſin } BAD : KL$$
$$\text{ſin } CKI : DH = \text{ſin } ADE : HK$$
$$\text{ſin } CIK : EH = \text{ſin } DEB : HI$$
$$\text{ſin } CIK : BL = \text{ſin } ABE : IL$$

Unde fit

$$\frac{AL . \text{ſin } BAD}{KL} = \frac{DH . \text{ſin } ADE}{HK}$$
$$\frac{EH . \text{ſin } DEB}{HI} = \frac{BL . \text{ſin } ABE}{IL}$$

Fiat iam

$$KL : HK = 1 : m$$
$$HI : IL = 1 : n$$

erit

$$m(AB + BL) \text{ſin } BAD = DH . \text{ſin } ADE.$$
$$n(ED + DH) \text{ſin } DEB = BL . \text{ſin } ABE.$$

Unde porro

$$DH = \frac{m(AB + BL) \text{ſin } BAD}{\text{ſin } ADE}$$
$$DH = \frac{BL . \text{ſin } ABE - n . ED . \text{ſin } DEB}{n . \text{ſin } DEB}$$

adeoque

$$BL = n . ſ DEB [m AB ſ BAD + ED . ſ ADE] : [ſ ABE . ſ ADE - mn ſ BAD ſ DEB]$$

Data vero BL, facile dabitur DH, unde & ſitus rectae HL.

SCHO-

SCHOLION I.

§. 52. Demonſtratio ſolutionis prioris ex Lemmate ſexto & ſeptimo petitur. Sunt enim rectae AB, AC, BC, eg, LH tangentes parabolae. Ceterum ſi in formula, quam exhibet ſolutio poſterior, lateribus uti praeſtet, eam ſequenti ratione mutare licet. Primo enim abit in ſequentem

$$BL = \left(m.n.\frac{AB.\sin BAD}{\sin ADE} + n.ED\right) : \left(\frac{\sin ABE.}{\sin DEB.} - \frac{m.n\sin BAD}{\sin ADE}\right)$$

Ducatur BD ipſi ED parallela, eritque

$$AdB = ADE$$
$$AB.\sin BAD : \sin ADE = Bd.$$
$$\sin ABE : \sin DEB = Ee : eB$$
$$\sin BAD : \sin ADE = eD : Ae$$

adeoque

$$BL = (m.n.Bd + n.ED) : \left(\frac{Ee}{eB} - m.n.\frac{eD}{Ae}\right)$$

ſiue

$$BL = n.eB.Ae(m.Bd + ED) : (Ee.Ae - m.n.eD.eB)$$

SCHOLION II.

§. 53. Aliam huius problematis ſolutionem inuenias in *Arithmetica uniuerſali* ſummi NEWTONI, qui idem ad eruendam Cometae diſtantiam geocentricam adhibuit, ponendo exiguam orbitae partem inſtar rectae ſpectari poſſe, ſumitque puncta H, I, K, L eſſe quatuor cometae loca in planum Eccliptices proiecta.

LEMMA XIX. PROBLEMA VIII.

Fig. 9. §. 54. *Quatuor rectis poſitione datis AE, AG, BF, BH inſcribere quadrilaterum datum EFGH.*

SOLVTIO.

Ob rectas poſitione datas dabuntur anguli CAD, CBD, CAB, CBA. Conſtructo itaque quadrilatero EFGH, per angulos oppoſitos EG, FH ducantur circuli ita ut arcus EG, FH ſint angulis EAG, FBH duplo maiores, atque facile obuium eſt puncta A, B, in peripheriis horum circulorum eſſe ſita. Fiat porro arcus Ea = 2 CAB, arcus FB = 2 ABD, atque per puncta b, a agatur recta baBA, quae in peripheria utriuſque circuli ſitum punctorum B, A abſcindet. Denique ducant HBC, FBD, eruntque EA, GA, FB, HB quatuor iſtae rectae quibus quadrilaterum EFGH erat inſcribendum.

SCHOLION.

§. 55. Facile patet, haud opus eſſe ut latera quadrilateri EFGH data ſint in eadem menſura, qua latera quadranguli ABCD, verum ſufficit notos eſſe angulos E, F, G, H una cum ratione laterum inter ſe. Hac ratione uſui eſſe poterit hoc problema, ubi cometae orbita iam proxime fuerit definita. Quod ſi enim proxime detur curuatura eius partis orbitae, quam cometa interuallo quatuor obſervationum percurrit, problema hoc voto magis ſatisfaciet ac praecedens, quod partem orbitae ſupponit eſſe rectam.

LEM-

LEMMA XX.

§ 56. *Biſecta chorda NM parabolae in G, ducatur GQ axi AF parallela, nectantur Q & focus F recta QF, denique chorda NM transferatur in n m, ita ut FQ eam ſub angulo recto biſecet, dico puncta n, m eſſe in parabola nQm, cuius vertex Q, axis QF, focus F. & arae ſectorum nFm, NFM erunt in ratione ſubduplicata ſemilaterum rectorum.* Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

Etenim ob $NG = GM$, & GQ axi AF parallelam, chorda NM erit parallela rectae, quae parabolam tangit in Q. adeoque $NEF = \frac{1}{2}QEB$, & $QG = QE$ (§. 38. 1.) Porro per naturam parabolae eſt

$$NM^2 = 16 . FQ . QG$$

adeoque &

$$nm^2 = 16 . FQ . QE$$

Quae aequatio eſt ad parabolam, cuius axis & diſtantia foci a vertice eſt FQ. Similiter ob $QG = QE$, area ſegmenti NQM erit ad aream ſegmenti nQm ut ſinus anguli $QGE = QEG = NEF$ ad ſinum totum. At in eadem quoque ratione ſunt triangula FNM Fnm, ob baſes NM, nm aequales; Unde & integri ſectores NFM, nFm ſunt in ratione ſinus anguli NEF ad ſinum totum. Eſt vero (§. 4.)

$$\sin NEF : 1 = \sqrt{AF} : \sqrt{FQ} = \sqrt{2AF} : \sqrt{2FQ}$$

adeoque

$$NFMN : nFmn = \sqrt{2.AF} : \sqrt{2.FQ}$$

Sunt vero 2AF, 2FQ ſemilatera recta, unde conſtat propoſitum.

SCHOLION.

§. 57. Lemma hoc, ſi debite limitetur, ad ſingulas ſectiones conicas extendi poterit. Idem quoque ita poſſe inuerti, ut ex data parabola nQm, deducatur quaeuis alia NQM, quae per verticem prioris Q tranſeat, vel me tacente patet.

LEMMA XXI. PROBLEMA IX.

§. 58. *Data chorda NM & ſagitta QG, inuenire aream ſegmenti NQM & ſectoris NFM.*

SOLVTIO.

Area ſegmenti nQm eſt $=\frac{2}{3}QE.nm$, trianguli $nFm=\frac{1}{2}FE.nm$, quare erit area ſectoris

$$nFmQ=\tfrac{2}{3}QE.nm+\tfrac{1}{2}FE.nm$$

ſiue

$$nFmQ=\tfrac{1}{6}QE.nm+\tfrac{1}{2}FQ.nm$$

Eſt vero (§. 56.)

$$nFmQ:NFMQ=nmQ:NMQ=\sqrt{FQ}:\sqrt{AF}$$

$$nm=NM$$

$$QE=QG$$

Quare erit area

$$\text{ſegmenti } NMQ=\tfrac{2}{3}NM.QG\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

$$\text{ſectoris } NFMQ=NM(\tfrac{1}{6}GQ=+\tfrac{1}{2}FQ)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

Cum vero ſit

$$NM^2=16.QG.FQ$$

erit

erit area

ſegmenti $NMQ = \frac{8}{3}\sqrt{(QG^3.AF)}$

ſectoris $NFMQ = (\frac{2}{3}QG^2 + \frac{1}{8}NM^2).\sqrt{\frac{AF}{QG}}$

COROLLARIVM.

§. 59. Similiter erit area ſectoris

$$NFMQ = NM\left(\frac{NM^2}{96.FQ} + \frac{1}{2}FQ\right)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

LEMMA XXII. PROBLEMA X.

§. 60. *Data chorda $NM = k$ & ſumma laterum $FM + FN = a + b$, inuenire aream ſectoris FNQM.*

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 58)

$$NFMQ = NM(\tfrac{1}{6}QG + \tfrac{1}{2}FQ)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

atque porro (§. 44. 45.)

$$FQ = \tfrac{1}{4}[a+b+\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]$$
$$QG = \tfrac{1}{4}[a+b-\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]$$

erit ſubſtitutione debitaque reductione facta

$$NFMQ = \frac{k[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}{3\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}}.\sqrt{AF}$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 61. Cum ſit
$$[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}].[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]=k^2$$
erit quoque
$$NFMQ=\sqrt{[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}\cdot[a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]\frac{\sqrt{AF}}{3}$$

COROLLARIVM II.

§. 62. Huius formulae factor poſterior $a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}$ leui mutatione abit in
$$\tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]$$
adeoque formula ipſa mutatur in ſequentem
$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+b)-\sqrt{((a+b^2-k^2)}]}.(a+b)+\tfrac{1}{2}k\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$
fiat breuitatis ergo $a+b=g$, eritque
$$\frac{3NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}g\sqrt{(g-\sqrt{(g^2-k^2)})}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{(g+\sqrt{(g^2-k^2)})}$$

COROLLARIVM III.

§. 63. Hinc vero fit
$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}g\sqrt{\frac{g+k}{2}}-\tfrac{1}{2}g\sqrt{\frac{g-k}{2}}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{g+k}{2}}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{g-k}{2}}$$
adeoque
$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}(g+k)\sqrt{\frac{g+k}{2}}-\tfrac{1}{2}(g-k)\sqrt{\frac{g-k}{2}}$$

ſiue

ſiue breuiſſime

$$\frac{3.\text{NFMQ}}{\sqrt{\text{AF}}} = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2}$$

atque proinde area ſectoris

$$\text{FNMQ}=\text{A}=\left[\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}\right].\tfrac{1}{3}\sqrt{\text{AF}}$$

SCHOLION I.

§. 64. Hanc formulam admodum concinnam prolixiori ratiocinio erutam, infra breuius demonſtratam dabimus, cum de inueniendo tempore, quo cometa datum quemlibet orbitae parabolicae arcum NM emetitur, ſermo erit. Ceterum hic notabimus ſimile quid obtineri poſſe, ſi orbita fuerit ſectio conica quaecunque, atque debitae fiant mutationes & limitationes.

SCHOLION II.

§. 65. En itaque Lemmata potiora, quae praeſtruenda eſſe duxi, quo concinnior euaderet theoria motus cometarum in orbitis parabolicis incedentium. Videbimus vero formulas hactenus erutas ſimpliciores fieri, ſi in vicem areae ſectoris NFMQ ſubſtituamus tempus quo cometa arcum NM percurrit.

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO II.

Exponuntur Symptomata notabiliora motus Cometarum parabolici.

LEX CAELI I.

§. 66. *Singula corpora caeleſtia, quae circa Solem gyrantur, Planetae nempe & Cometae, aguntur viribus centralibus, atque in Solem grauia ſunt, ita ut grauitas decreſcat reciproce ut quadratum diſtantiae.*

LEX II.

§. 67. *Proinde Tempora, quibus datum arcum orbitae percurrunt, areis ſunt proportionalia, quas verrit radius vector, ſiue recta e centro Solis in centrum planetae vel cometae ducta.*

LEX III.

§. 68. *Ita ergo circa Solem aguntur, ut orbita, in qua incedunt, neceſſario ſit Sectio conica, in cuius foco alterutro eſt centrum Solis.*

LEX IV.

§. 69. *Tempus quo cometa vel planeta arcum datum orbitae ſuae percurrit, eſt ut area, quam verrit radius vector, per radicem quadratam ſemilateris recti diuiſa, ſi diuerſi inter ſe comparentur cometae vel planetae.*

SCHOLION.

§. 70. Non eſt huius loci, ut exponamus, quaenam in demonſtrandis his legibus experientiae, quaenam principiis mechanicis debeantur. Anſam dedit acutiſſimus KEPLERVS, cum tres poſteriores ex operoſiſſimis obſeruationibus deduceret eaſque planetis adplicaret. Primam ex obſeruationibus deduxit ſummus NEWTONVS, remque omnem ad principia Mechanices tranſtulit, cum theoriae virium centralium prima ſtrueret fundamenta. Legem tertiam potiſſimum eius neceſſitatem ſolito ſuo ingenii acumine ſolitaque ſagacitate in apricum produxit inter Geometras facile Princeps JO. BERNOVLLIVS. Singulae iam ita ubique ſunt obuiae, atque velut in vulgus notae, ut actum agerem, ſi in iis denuo demonſtrandis tempus terere vellem. Principiorum inſtar heic ſunto, ex quibus ſpecialiora deducentur motuum caeleſtium ſymptomata. Haec vero ut nexu magis naturali & continuo ex legibus iſtis manare queant, nouis iam nota praefigere atque immiſcere propoſitum eſt, quatenus haec ad rem noſtram quicquam facient.

THEO-

THEOREMA I.

§. 71. *Si duo pluresue Cometae in orbitis ellipticis incedant, quarum axes maiores ſunt aequales, tempora periodica erunt aequalia.*

DEMONSTRATIO.

Fig. 11. Sit F centrum ſolis unaque focus ellipſeos ADB, axis maior ſit AB, minor EG, ſemilatus rectum FD, erit per naturam ellipſeos

$$FD.AC = CE^2 = AF\,FB$$

Denotet porro $1:\pi$ rationem diametri circuli ad peripheriam erit area ellipſeos

$$A = \pi.AC.CE$$

At vero per legem quartam (§ 69.) tempus eſt ut area per radicem quadratam ſemilateris recti diuiſa, quare dicto tempore periodico $= T$, erit

$$T = \frac{\pi.AC.CE}{m\sqrt{FD}}$$

Eſt vero

$$\sqrt{FD} = CE:\sqrt{AC}$$

adeoque erit

$$T = \frac{\pi}{m}.AC^{3:2}$$

Pendet ergo tempus periodicum unice ab axe maiore ellipſeos. Unde liquet propoſitum, ſimulque & ſequens

THEO-

THEOREMA II.

§. 72. *Tempora periodica cometarum & planetarum in ellipſibus incedentium ſunt in ratione ſesquiplicata ſemiaxium maiorum vel diſtantiae heliocentricae mediae.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim diſtantia media $FE = \frac{AF+FB}{2} = AC.$

Sed vi theorematis praecedentis eſt

$$T = \frac{\pi}{m} AC^{3:2}$$

Quare &

$$T = \frac{\pi}{m} . FE^{3:2}$$

PROBLEMA XII.

§. 73. *Exhibere diſtantias & tempora cometarum planetarumue in numeris abſolutis, una cum ratione, quam tempus & diſtantia inter ſe ſeruant.*

SOLVTIO I.

Cum tellus moueatur in ellipſi, ponatur eius diſtantia media ſiue, quod vulgo aiunt, radius orbis magni = 100000, atque in his partibus definiantur diſtantiae quaelibet aliae. Porro efferatur tempus in diebus naturalibus, horumque partibus decimalibus. Eſt vero tempus periodicum telluris = 365,25659 dierum.

Quare erit in formula theorematis praecedentis

$$AC = FE = 100000$$
$$T = 365,25659.$$

Hinc iam habebitur valor literae m, quae rationem quaeſitam denotat. Eſt vero

$$m = \frac{\pi . AC^{3:2}}{T}$$

adeoquê

$$\log . AC^{3:2} = 7,5000000$$
$$\log . \ \pi \ = 0,4971499$$
$$7,9971499$$
$$\log . \ T \ = 2,5625980$$
$$\log . \ m \ = 5,4345519$$

unde

$$m = 271989,4.$$
$$T = \frac{\pi . AC^{3:2}}{271989,4.}$$

SOLVTIO II.

Inuentis fractionibus decimalibus, radius orbis magni commodius fit $=1$. Ponatur itaque

$$T = n . \pi . AC^{3:2}$$

erit $AC = 1$, quare

$$n = T : \pi$$
$$\log . T = 2,5625980$$
$$\log . \pi = 0,4971499$$
$$\log . n = 2,0654481$$

unde

$$n = 116,2648. = \frac{1}{m}$$

Sit

Sit itaque area ſectoris cuiuslibet NFM $= A$, ſemilatus rectum $= s$, tempus quo percurritur arcus NM, in diebus naturalibus exprimendum $= T$, erit Fig. 5.

1° poſito radio orbis magni $= 100000$

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A:\sqrt{s}}{271989,4}$$

2° poſito radio orbis magni $= 1$, erit

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{n.A}{\sqrt{s}} = \frac{A.\,116,2648}{\sqrt{s}}$$

SCHOLION.

§. 74. In ſequentibus plerumque utemur literis π, m, n, A, T, quarum ergo ſignificatus conſtanter retinebitur idem, haud ſecus ac ille, quem ſupra (§. 33.) literis *a*, *b*, *c*, *k* tribuimus. Significatum literarum m, T, A eodem ſenſu iam adhibuit perilluſtris EVLERVS in *Theoria cometarum & planetarum.*

PROBLEMA XXIII.

§. 75. *Inuenire celeritatem cometae in circulo incedentis.*

SOLVTIO.

Sit ſemidiameter circuli $= r$, erit eius area $= \pi r^2$, adeoque tempus periodicum

$$T = \frac{\pi.rr}{m\sqrt{r}} = \frac{\pi}{m}.r^{3:2}$$

Hoc tempore abſoluit peripheriam $= 2\pi r$. Quare ſi celeritas exprimatur per arcum uno die naturali percurrendum, eaque dicatur $= K$, erit

$$K = 2\pi r : T = 2m : \sqrt{r}$$

THEOREMA III.

Fig. 12. §. 76. *Si cometa incedat in parabola AM celeritas in dato quouis loco M eſt ad celeritatem, qua incederet in circulo MP ad eandem a Sole F diſtantiam ut $\sqrt{2}$ ad 1.*

DEMONSTRATIO.

Cum tempora ſint ut areae per radicem quadratum ſemilateris recti diuiſae (§. 69.) erit tempus quo percurritur arcus parabolicus infinite paruus MN

$$T = \mathrm{MFN} : m\sqrt{2\mathrm{AF}}$$

tempus vero, quo percurritur arcus circularis MP

$$t = \mathrm{MFP} : m\sqrt{\mathrm{FM}}$$

At vero celeritates ſunt ut arcus per tempus diuiſi quare ſi dicantur C, K, erit

$$C = \mathrm{MN} : T = \mathrm{MN} . m\sqrt{2\mathrm{AF}} : \mathrm{MFN}$$
$$K = \mathrm{MP} : t = \mathrm{MP} . m\sqrt{\mathrm{MF}} : \mathrm{MFP}$$

adeoque

$$C.K = \frac{\mathrm{MN} . \sqrt{2\mathrm{AF}}}{\mathrm{MFN}} : \frac{\mathrm{MP} . \sqrt{\mathrm{MF}}}{\mathrm{MFP}}$$

Eſt vero (§. 4.)

$$\mathrm{AF} = \mathrm{MF} . \sin\mathrm{MNP}^2 = \mathrm{MF} . \mathrm{MP}^2 : \mathrm{MN}^2$$

Quare

Quare

$$MN\sqrt{AF} = MP\sqrt{MF}$$

Sed ob angulum MFN infinite paruum, areae ſunt aequales, adeoque ſubſtituendo erit

$$C:K = \sqrt{2}:1$$

COROLLARIVM.

§. 77. Cum celeritas circularis ſit (§. 75.)

$$K = 2m:\sqrt{MF}$$

erit celeritas parabolica

$$C = 2m\sqrt{2}:\sqrt{MF}$$

Quae formula exprimit ſpatium, quod cometa uno die naturali iuxta directionem tangentialem percurreret (§. 75.) niſi vi grauitatis a recta deflecteretur.

SCHOLION.

§. 78. Hac proprietate motûs parabolici uti licet, ſi proxime definienda ſit longitudo arcus exiguo temporis interuallo percurſi, eaque, debita adhibita limitatione, haud difficulter orbitis ellipticis adplicatur. Propoſitionis concinnitas inde eſt, quod celeritas parabolica unice pendet a diſtantia cometae heliocentrica, atque perinde eſt, quanta ſit parabolae parameter. At vero cum celeritas ſingulis momentis mutetur, exiguus propoſitionis ceteroquin notiſſimae eſt uſus. En ergo alias uniuerſaliores.

PROBLEMA XIIII.

Fig. 5. §. 79. *Dato utroque radio vectore NF, MF & angulo NFM, inuenire tempus, quo cometa emetitur arcum parabolicum NM.*

SOLVTIO.

Area ſectoris NFMQ eſt (§. 29.)

$$A = \frac{1}{3}\sqrt{ab}.\sin c\,(a + b + \sqrt{ab}.\cos c)$$

Semilatus rectum (§. 28.)

$$s = 2AF = \frac{2ab\sin c^2}{a + b - 2\cos c.\sqrt{ab}}$$

At vero (§. 75.) tempus

$$T = \frac{n.A}{\sqrt{s}}$$

Quare ſubſtituendo, erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}.(a + b + \sqrt{ab}.\cos c)\sqrt{(a + b - 2\sqrt{ab}.\cos c)}$$

COROLLARIVM I.

§. 80. Hac formula euoluta erit

$$18m^2T^2 = (a+b)^3 - 3(a+b)ab\cos c^2 - 2ab\sqrt{ab}.\cos c^3$$

ſiue

$$18m^2T^2 = a^3 + b^3 + 3(a+b)ab\sin c^2 - 2ab\sqrt{ab}.\cos c^3,$$

ut adeo dato tempore T, ex quantitatibus *a*, *b*, *c* alterutra inueniatur ope aequationis tertii gradus.

COROL-

COROLLARIVM II.

§. 81. Si fuerit $c=\frac{1}{2}NFM=90°$, erit NFM $=180°$, adeoque $\cos c=0$, quare formula breuiſſima

$$T=\frac{n}{3\sqrt{2}}.(a+b)^{3:2}$$

exhibet tempus quo cometa e puncto quouis M peruenit ad punctum ipſi e diametro oppoſitum.

COROLLARIVM III.

§. 82. Quodſi ergo detur tempus, quo cometa ab uno nodorum ad alterum pertingit, dabitur longitudo lineae nodorum $a+b$, eritque

$$a+b=(18mT)^{2:3}$$

PROBLEMA XV.

§. 83. *Data ſumma radiorum vectorum FN, FM una cum chorda NM quae triangulum NFM claudit, inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM.*

SOLVTIO I.

Cum ſit (§. 30.)

$$2AF=s=\frac{k^2-(a-b)^2}{2[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

$$A=\frac{1}{8}[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}].\sqrt{(k^2-(a-b)^2)}$$

atque in genere (§. 75.)

$$T=\frac{nA}{\sqrt{s}}$$

 erit

erit ſubſtitutione debitaque reductione facta

$$T = \frac{n[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]\sqrt{[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}}{3\sqrt{2}}$$

SOLVTIO II.

Cum ſit (§. 31.)

$$2AF = [k^2-(a-b)^2].[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]:2k^2$$

erit, hac formula utendo

$$T = \frac{kn[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}{3\sqrt{2}[\sqrt{(a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)})}]}$$

SOLVTIO III.

Eſt (§. 63.)

$$\frac{3A}{\sqrt{AF}} = \left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}.$$

Sed (§. 75.)

$$T = nA:\sqrt{s} = A:m\sqrt{2AF}$$

quare

$$T = \frac{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}}{m.3\sqrt{2}}$$

COROLLARIVM I.

§. 84. Dicta ſumma radiorum vectorum $a+b=g$, formula, quam ſuppeditat ſolutio prima reſoluitur in aequationem ſequentem

$$0 = k^6+6g^2k^4+9g^4k^2-144m^2T^2g^2$$
$$-432m^2T^2gk^2+72^2.m^2T^2$$

COROL-

COROLLARIVM II.

§. 85. Similiter formula Solutionis tertiae abit in ſeriem

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{4.6.g^{3:2}} - \frac{1.3.5.k^5}{4.6.8.10.g^{7:2}}$$

$$- \frac{1.3.5.7.9.k^7}{4.6.8.10.12.14.g^{11:2}} - \&c.$$

ſiue reductis fractionibus

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{24.g^{3:2}} - \frac{k^5}{128.g^{7:2}} - \frac{3.k^7}{1024.g^{11:2}}$$

$$- \frac{143\,k^9}{98304\,g^{15:2}} - \&c.$$

Quae ſeries admodum eſt conuergens, quoties angulus NFM fuerit paucorum graduum. Ceteris caſibus formula ipſa praeſtat, cum abſoluta ſit.

PROBLEMA XVI.

§. 86. *Data chorda NM & ſagitta QG = QE, inuenire tempus quo cometa percurrit arcum NM.* Fig. 6.

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 58.)

$$A = (\tfrac{2}{3}.QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2).\sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

atque porro (§. 75.)

$$T = nA : \sqrt{2AF}$$

 erit

erit

$$T = n(\tfrac{2}{3}.QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2) : \sqrt{2QG}$$

PROBLEMA XVII.

§. 87. *Data chorda NM & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa arcum NM emetitur.*

SOLVTIO.

Per formulam problematis praecedentis eſt

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2) : \sqrt{2QG}$$

Sed

$$\frac{NM^2}{16.FQ} = QG$$

Quare erit

$$T = \frac{n.NM}{\sqrt{2}}\left[\frac{NM^2}{96.FQ^{3:2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{FQ}\right]$$

COROLLARIVM.

§. 88. Hac formula euoluta habebitur aequatio

$$NM^3 + 48NM.FQ^2 = 96\sqrt{2}.mT.FQ^{3:2}$$

ex qua ea ratione quam in *Tom. III. Actorum Heiueticorum* deſcriptam dedi, fit ſeries

$$NM = \frac{2\sqrt{2}.mT}{\sqrt{FQ}} - \frac{\sqrt{2}.m^3T^3}{3.FQ^{7:2}} + \frac{m.^5T.^5\sqrt{2}}{6.FQ^{13:2}} - \frac{m^7T^7.\sqrt{2}}{9.FQ^{19:2}} + \&c.$$

ſiue

ſiue poſito radio orbis magni $=1$, atque ſubſtituto valore ipſius $m = \frac{1}{n}$, quem vidimus eſſe (§. 73.)

$$n = 116{,}2648$$

prodibit ſeries in numeris abſolutis

$$NM = \frac{0{,}0243747 \cdot T}{\sqrt{FQ}} - 0{,}0000003006425 \frac{T^3}{FQ^{7:2}}$$

$$+ 0{,}00000000001109490 \frac{T^5}{FQ^{13:2}} - \&c.$$

Sunt vero logarithmi coefficientium

primi $= 0{,}3860969 - 2$
ſecundi $= 0{,}4780495 - 7$
tertii $= 0{,}0451232 - 11$
&c.

SCHOLION I.

§. 89. Haec ſeries maxime videtur conuergens, at eo tantum caſu citius conuergit, quo tempus T eſt paucorum dierum, atque radius vector FQ unitate parum ſit minor.

SCHOLION II.

§. 90. Alio inſuper caſu uſui eſſe poterit haec formula, cum computanda eſt longitudo ordinatae nm, dato tempore, quo arcus nQm percurritur. Fig. 10.

PROBLEMA XVIII.

§. 91. *Data ſagitta QG & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa percurrit arcum NQM.*

SOLV-

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 86.)

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2) : \sqrt{2QG}$$

atque

$$NM^2 = 16 FQ . QG$$

erit

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + 2FQ.QG) : \sqrt{(2QG)}$$

COROLLARIVM.

§. 92. Hinc erit viciſſim

$$FQ = mT : \sqrt{8QG} - \tfrac{1}{3} . QG = \frac{a+b}{2} - QG$$

$$a + b = mT : \sqrt{2QG} + \tfrac{1}{3}QG$$

THEOREMA IV.

§. 93. *Sint omnia ut in lemmate vigeſimo* (§. 56.) *tempora, quibus percurruntur arcus NQM, nQm ſunt aequalia.*

DEMONSTRATIO.

Patet enim ex Problemate praecedente, tempus definitum eſſe per radium vectorem FQ & ſagittam QG. At vero in utraque parabola, vi Lemmatis citati idem eſt radius vector, & ſagittae QG, QE ſunt aequales. Unde quoque tempora quibus arcus nm, NM percurruntur aequalia ſunt.

Ali-

Aliter.

Tempora ſunt ut areae per radicem ſemilateris recti diuiſae (§. 69.) unde erunt ut ($NFMN : \surd 2AF$) ad ($nFmn : \surd 2FQ$) At vero (§. 57.)

$$\frac{NFMN}{\surd 2AF} = \frac{nFmn}{\surd 2FQ}$$

Quare & ipſa tempora ſunt aequalia.

COROLLARIVM.

§. 94. Cum tempus definiatur per ſummam radiorum vectorum $Fn + Fm$, ſiue $FN + FM$, & chordam nm, ſiue NM, hoc vero caſu ſit $nm = NM$ (§. 56.) atque tempus utrumque aequale, patet viciſſim, eſſe quoque $nF + mF = NF + MF$. ſiue ſummam radiorum vectorum eſſe aequalem.

SCHOLION.

§. 95. Inſignis haec motus cometarum parabolici proprietas, ſi debite limitetur, ceteris quoque Sectionibus conicis adplicabilis eſt. Ceterum idem hic notandum, quod ad Lemma vigeſimum (§. 56.) notauimus, parabolae NM, retento foco F ſubſtitui poſſe quamlibet aliam, quae tranſeat per punctum Q. Cumque tempus, quo abſoluitur motus cometae per arcum quemuis NQM unice pendeat a longitudine chordae NM, & ſumma laterum $NF + MF$, hinc uniuerſaliſſime euidens fit motus cometarum parabolici iſochroniſmus, & quid ſibi velit celeritas ad eandem a ſole F diſtantiam in ſingu-

ſingulis quibuſuis parabolis eadem. At vero accedamus ad ea, quae hinc ſequuntur.

THEOREMA V.

§. 96. *Data ſumma radiorum vectorum FN, FM una cum chorda NM, tempus, quo traiicitur arcus NQM, quem chorda NM ſubtendit, plane idem eruetur, quacunque utaris parabola, dummodo ſumma laterum FN+ FM ſemilatere recto ſit maior.*

DEMONSTRATIO.

Primum inde euidens eſt, quod chorda NM & ſumma laterum FN+FM definiendo tempori, quo percurritur arcus NQM ſatisfaciunt. Cum vero quaecunque aſſumatur parabola, ea tranſire debeat per punctum Q, patet maximum ſemilatus rectum fore $= 2FQ$. Eſt vero (§. 94) $FN+FM = Fn+Fm$, & per naturam parabolae $Fm = Fn = FQ+QE$ adeoque $Fn > FQ$, unde $FN+FM > 2FQ$.

SCHOLION.

§. 97. Eligenda itaque parabola talis, ut eius ſemilatus rectum minor ſit quam 2FQ. Quodſi ergo conſtruenda ſit ſcala ſingulis quibuſuis parabolis inſeruitura, ea commodiſſime adhibebitur, cuius latus rectum $= 0$, ſiue quod eodem redit, linea recta, a centro ſolis in infinitum producenda. Etſi vero vix cometa in huiuſcemodi parabola rectilinea incedat, utiliter tamen aſſumi poterit, quippe pro definiendo motu cometarum in quibuſuis aliis parabolis

rabolis inſtar moduli erit. Cumque haec parabola cum linea recta coincidat, cometa, qui in ea incedere ponitur, veluti in ſolem cadere videtur. Naſcitur hinc vel ſua ſponte

DEFINITIO I.

§. 98. *Lapſus parabolicus cometae in ſolem eſt eiuſdem in parabola inceſſus, cuius latus rectum* $=0$, *ſiue cuius vertex cum foco in centro ſolis coincidit.*

COROLLARIVM I.

§. 99. Quoniam parabola in infinitum excurrit, lapſus parabolici initium eſt nullum, adeoque in data quauis a ſole diſtantia iam adeſt definitus celeritatis gradus.

COROLLARIVM II.

§. 100. Cum celeritas cometae in parabola incedentis unice pendeat ab ipſius a ſole diſtantia (§. 78.) dicta hac diſtantia $=MF$, erit (§. 77.) Fig. 13.

$$C = m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$$

COROLLARIVM III.

§. 101. Cumque porro lapſus parabolici initium ſit nullum (§. 99.) tempora commodius a centro ſolis retro numerantur, loco lapſus aſcenſum parabolicum aſſumendo.

PRO-

PROBLEMA XIX.

§. 102. *Definire temporum interualla in lapſu parabolico, ſiue t-mpus, quo cometa a data diſtantia ad datam quamuis aliam delabitur.*

SOLVTIO.

Sit F centrum ſolis, FM diſtantia altera, FN altera, atque quaeritur tempus, quo cometa labitur per ſpatium MN. Spectentur FM, FN ut radii vectores, MN ut chorda arcus percurrendi, qui hoc caſu omni curuedine caret, atque erit (§. 83.)

$$T = \frac{\left(\frac{FN+FM+MN}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{FM+FN-MN}{2}\right)^{3:2}}{m3\sqrt{2}}$$

Eſt vero hoc caſu

$$MN = FM - FN$$

adeoque

$$\frac{FN+FM+MN}{2} = FM$$

$$\frac{FN+FM-MN}{2} = FN$$

Quare erit tempus quaeſitum

$$T = \frac{FM^{3:2} \quad FN^{3:2}}{3m\sqrt{2}}$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 103. Quodſi ergo quaeratur tempus, quo cometa ex M pertingit ad centrum ſolis F, erit FN=0, adeoque

$$T = FM^{3:2} : 3m\sqrt{2}$$

COROLLARIVM II.

§. 104. Hinc erit viciſſim

$$FM = (18T^2 : n^2)^{1:3}$$

ſiue ſubſtituto valore ipſius n pro radio orbis magni =1, (§. 73.)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0{,}9585412.$$

Qua ergo formula in numeris abſolutis definietur diſtantia FM per tempus lapſus parabolici, & vice verſa.

SCHOLION.

§. 105. Si in formula corollarii primi pro FM ſucceſſiue ſubſtituantur diſtantiae planetarum mediae, inuenietur numerus dierum, quibus abſoluitur lapſus parabolicus cometae in ſolem

e ♄ diebus 807,50.
♃ - - 325,00.
♂ - - - 51,54.
♁ - - 27,40.
♀ - - - 16,85.
☿ - - 6,60.

Lapſus parabolicus cometae per radium orbis magni curatius definitus eſt $= 27^d; 9^h; 41'; 34''$.

COROLLARIVM.

§. 106. Cum lapſus hic ſit dato quouis motu elliptico, parabolico & circulari celerior, numeri dierum, quos hic exhibuimus, denotant ſemimoram cometae breuiſſimam intra orbitam cuiuslibet planetae. Unde mora breuiſſima intra orbitam

♄	eſt dierum	1615,00
♃	- - -	650,00
♂	- - - -	103,08
♁	- - - -	54,80
♀	- - - - -	33,70
☿	- - - -	13,20

Ceterum ſi lapſus ponatur hyperbolicus, cogitari poterit mora dato quouis interuallo temporis minor. At cum lapſus parabolicus ſit ellipticorum limes, moram lapſus parabolici breuiſſimam adpellare maluimus. Patet vero hinc cometas, qui ſe nobis ſpectandos ſiſtunt, fere integrum quinquennium intra orbitam Saturni commorari, etſi nobis vix totidem menſes conſpicui ſint.

DEFINITIO II.

§. 107. *Scala celeritatum parabolicarum nobis hic eſt ea, quae ad datam quamuis a ſole diſtantiam celeritatem cometae in parabola incedentis exhibet.*

THEOREMA VI.

§. 108. *Si F denotet centrum ſolis, atque dato cuiuis puncto M adſcribatur numerus dierum vel tempus, quo abſoluitur lapſus parabolicus cometae ex M*

in F, recta FM hoc modo diuiſa erit ſcala celeritatum parabolicarum.

DEMONSTRATIO.

Etenim quaelibet abſciſſa quantumuis exigua Mm exhibet ſpatiolum lapſus. Cum vero tempora adſcripta ſint, dabitur quoque tempuſculum, quo abſoluitur lapſus per Mm. At vero ſi ſpatiolum Mm per tempus diuidatur, habebitur celeritas. Unde recta FM exhibet celeritates lapſus parabolici. Cum vero celeritas cometae in parabola quacunque incedentis ad eandem a ſole diſtantiam ſit eadem (§. 78.) conſequens eſt, ſcalam FM in uniuerſum exhibere celeritatem motus cometarum parabolici.

SCHOLION.

§. 109. Dantur quoque & alii modi huiuſcemodi ſcalas conſtruendi, at hic, quem iam deſcripſimus ad ſcopum noſtrum adcommodatior eſt.

PROBLEMA XX.

§. 110. *Scalam celeritatum parabolicarum conſtruere.*

SOLVTIO.

Aſſumto radio orbis magni FT = 1, per formulam (§. 104.)

$$\log FM = \tfrac{1}{2} \log T - 0{,}9585412$$

pro quouis numero dierum T computetur diſtantia reſpondens FM, haec in rectam FM transferatur ex F in M, atque puncto M adſcribatur numerus dierum pro ea definienda aſſumtus, & ſcala erit conſtructa.

SCHOLION.

Fig. 14. §. 111. Huiuſmodi ſcalam ſiſtit figura decima quarta, quam ad 100 dies extendi. F eſt centrum ſolis, FT radius orbis magni, atque punctum T cadit in $27^{d}; 9^{h}; 41'; 34''$ (§. 105.) Quodſi eiuſmodi ſcala conſtruatur, aſſumta diſtantia FT maiori, commode diſtinguentur horarum interualla. Et vel per ſe euidens eſt, in conſtruenda orbita cometae retinendam eſſe diſtantiam FT, ad quam ſcala ipſa conſtructa eſt. Quod ergo, ne in ſequentibus repetendum ſit, hic monuiſſe ſufficiat.

PROBLEMA XXI.

§. 112. *Conſtructa orbita cometae parabolica ſcalae adcommodata, definire tempus, quo datus quilibet ipſius arcus percurritur.*

SOLVTIO.

Fig. 15. I. Sit parabola AM, eius focus F, radius orbis magni FT. quaeritur tempus, quo percurritur arcus MN. Transferatur FN in Fν, biſecetur νM in g, eritque $Fg = \frac{FN + FM.}{2}$

Similiter biſecetur chorda NM in G. Quo

Fig. 14. facto transferatur Fg in ſcalam, ex F in g, ubi

ubi cadit in $18^{d}; 9^{h}$. Capiatur ſemilongitudo chordae, eaque in ſcala transferatur ex g in m & n, ubi cadit in 29^{d} & $6^{d}; 4^{h}$. quae tempora ſi ab inuicem ſubtrahantur, remanet $22^{d}; 20^{h}$. Hoc itaque temporis interualla percurritur arcus NM.

II. Quodſi arcus percurſus MAn in foco F formet angulum MFn gibbum ſiue duobus rectis maiorem, eodem modo quaeritur ſemiſumma radiorum vectorum $(FM+FN):2$, & dimidium chordae Mn. Illa cadit in diem 16, atque ſemilongitudo chordae ex 16^{d} antrorſum & retrorſum translata in $0^{d}; 3^{h}$ & $43^{d}; 5^{h}$. At ob angulum MFn gibbum, ſumenda eſt horum temporum ſumma. Unde $0^{d}; 3^{h} + 43^{d}; 5^{h} = 43^{d}; 8^{h}$ erit tempus quo percurritur arcus MAn.

III. Si quaeratur tempus, quo Cometa ex dato puncto M peruenit in punctum oppoſitum m, hoc caſu radii vectores FM, Fm cum chorda Mm coincidunt, atque tempus breuiſſime inuenitur, ſi tota chorda Mm in ſcalam transferatur, ubi cadet in $39^{d}; 10^{h}$. Hoc ergo temporis intervallo cometa percurrit arcum MAm.

DEMONSTRATIO.

Etenim tempus plane idem eſt, quoties ſumma radiorum vectorum & chorda arcus percurſi fuerint eaedem, quacunque utaris parabola (§. 96.) Quare cum ſemiſumma transferatur in Fg, & ſemilongitudo chordae ex g in m & n, erit mn longitudo chordae. Cum iam ſcalae

 ad-

adſcripta ſint tempora, quibus cometa datum ſpatium mn percurrit, patet, tempus, quo emetitur arcum MN hoc modo definitum iri.

SCHOLION I.

§. 113. Ex formula (§. 104. 110.)

$$\log FM = \tfrac{2}{3}\log T - 0{,}9585412$$

ſiue

$$FM = (18\,T^2 : n^2)^{1:3}$$

patet, *quadratum temporis quo cometa ex dato puncto g motu parabolico in ſolem f defertur eſſe in ratione cubi diſtantiae Fg.* Hinc conſequens eſt, *in ſcala celeritatum parabolicarum tempora octuplo maiora a ſole F eſſe quadruplo remotiora.* Quippe quadratum octenarii aequatur cubo quaternarii. Hinc ergo etſi ſcalae nonniſi dies integri adſcripti ſint, facile tamen definientur horae, ſingula certe ternarum horarum interualla ſiue dierum ſemiquadrantes; *Etenim quartae parti diſtantiae adſcribenda eſt pars temporis octaua.*

SCHOLION II.

Fig. 15. §. 114. *Quo in praxi ſuperflua reddatur chordae NM atque ſpatii v M biſectio, conſultum eſt, ſcalam conſtruere duplo maiorem.* Quo facto ipſa radiorum FM, FN ſumma, totaque chorda NM dicto modo in ſcalam erunt transferendae, ſimulque, quod vel per ſe euidens eſt, hac ratione diſcerni poterunt temporum minutiae duplo minores.

SCHO-

SCHOLION III.

§. 115. Quo breuius atque facilius abſolui poſſit ſcalae conſtructio computari poterit tabella relationem inter tempus & ſpatium lapſus parabolici exhibens (§. 110.) Tabella haec ſimul uſui erit, ubi calculo rem peragere volueris. Eam ideo ad calcem libri adiecimus, cum maxime uniuerſalis ſit ipſius uſus. Ceterum idem de tabella notandum, quod de ſcala notauimus (§. 113.) ſi tempora minora quaerantur.

SCHOLION IV.

§. 116. Ex problemate praeſenti patet, uſum ſcalae eſſe facilem & maxime expeditum, ubi ex ſumma radiorum FM+FN & chorda NM eruendum eſt tempus, quo arcus NM percurritur. At ſi problema inuertatur, atque ex ſumma radiorum & tempore quaeratur chorda, vel ex chorda & tempore ſumma radiorum, vel, quod ſaepius occurrit ex alterutro radio FN, tempore & ſemilatere recto parabolae radius alter FM, & chorda NM, res nonniſi tentando abſolui poterit. Unde quo uſus ſcalae in eruenda orbita cuiuſdam cometae euadat facilior, quaeſtionem ita immutare e re erit, ut ex ſumma radiorum FN+FM & chorda NM quaeratur tempus. Hoc enim cum tempore reapſe obſeruato congruere debet.

THEOREMA VII.

§. 117. *Si chorda Mm tranſeat per focum F, tempus quo percurritur arcus MAN, quem ſubtendit, unice pendet a longitudine chordae, atque perinde eſt foci F ſitus ſiue ab alterutra extremitate M, m diſtantia.*

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc caſu angulus c eſt $=90°$, unde (§. 81.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot (a+b)^{3:2}$$

Eſt vero $a+b = \mathrm{Mm}$, quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot \mathrm{Mm}^{3:}$$

COROLLARIVM I.

§. 118. Quodſi ergo focus F cum initio chordae coincidere ponatur, haec formula itidem exprimit tempus lapſus cometae parabolici in ſolem (§. 103.)

COROLLARIVM II.

§. 119. Hinc iam viciſſim deducetur formula (§. 83.)

$$mT = \left[\frac{(FN+FM+NM)^{3:2}}{2} - \frac{(FN+FM-NM)^{3:2}}{2}\right] : 3\sqrt{2}$$

Fig. 13. Labatur enim cometa ex M in N, tempus, quod impendit erit differentia temporum, quibus ex

ex M & N ad centrum ſolis delaberetur, adeoque (§. 118.)

$$mT = [FM^{3:2} - FN^{3:2}] : 3\sqrt{2}$$

Eſt vero

$$FM = \frac{FM + FN + MN}{2}$$

$$FN = \frac{FM + FN - MN}{2}$$

Quare ſubſtituendo prodibit

$$mT = \left[\left(\frac{FM+FN+MN}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{FM+FN-MN}{2}\right)^{3:2}\right] : 3\sqrt{2}$$

Hanc vero formulam uniuerſalem eſſe inde patet, quod tempus T unice a chorda MN & ſumma radiorum vectorum pendet.

PROBLEMA XXII.

§. 120. *Sint omnia ut in Lemmate duodecimo* Fig. 6. (§. 38.), *inuenire tempus quo percurritur arcus NQ vel MQ, ſi data ſint latera trianguli NFM.*

SOLVTIO.

Ob chordam NM in G biſectam, & QG axi AF parallelam, recta QG biſecat ſegmentum NMQ, & recta FG triangulum FNM: Quare mixtilineum NQGF erit pars dimidia ſectoris NFMQ. Subtracto itaque triangulo FQG vel idem addendo erit ſector

$$NFQ = \tfrac{1}{2} NFMQ - FQG$$

$$MFQ = \tfrac{1}{2} NFMQ + FQG$$

 Unde

Unde ſi tempora dicantur t, τ, erit (§. 73.)

$$t = (\tfrac{1}{2}NFMQ - FQG) : m\sqrt{2AF}$$
$$\tau = (\tfrac{1}{2}NFMQ + FQG) : m\sqrt{2AF}$$

ſiue dicto tempore, quo percurritur arcus NQM = T, erit

$$t = \tfrac{1}{2}T - FQG : m\sqrt{2AF}.$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}T + FQG : m\sqrt{2AF}.$$

Eſt vero area trianguli

$$FQG = \tfrac{1}{2}QG.GI$$

Sed per naturam parabolae

$$QI = 2\sqrt{(QF - AF)AF}.$$

Unde

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = QG\sqrt{(FQ - AF)}$$

Hinc fit

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = \sqrt{FQ}.QG.\sqrt{\left(1 - \frac{AF}{FQ}\right)}$$

Sed ob QW, NV axi AF parallelas, erit (§. 4. 38.)

$$\sqrt{\frac{AF}{FQ}} = \text{ſin}\, MNV = MV : NM$$

adeoque

$$\sqrt{\left(1 - \frac{AF}{FQ}\right)} = NV : NM = (a-b) : k$$

Porro eſt

$$NM^2 = 16FQ.QG$$

ſiue

$$QG.\sqrt{FQ} = \tfrac{1}{4}NM\sqrt{QG}$$

Unde

Unde (§. 45.)

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = \frac{a-b}{8}\left[\sqrt{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a+b-k}{2}\right)}\right]$$

Dicta iam breuitatis ergo ſumma laterum $a+b=g$ erit

$$6\sqrt{2}.m.t = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} - 3\left(\frac{a-b}{4}\right)\left[\left(\frac{g+k}{2}\right)^{1:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

&

$$6\sqrt{2}.m.\tau = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} + 3\left(\frac{a-b}{4}\right).\left[\frac{g+k}{2}^{1:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

PROBLEMA XXIII.

§. 121. *Data ſumma radiorum vectorum $NF+FM=a+b=g$, una cum tempore T, quo percurritur arcus NM inuenire longitudinem chordae $NM=k$.* Fig. 6.

SOLVTIO.

Per ſolutionem primam Problematis XV. eſt

$$Tm.3\sqrt{2} = [g+\tfrac{1}{2}\sqrt{(g^2-k^2)}].\sqrt{[g-\sqrt{(g^2-k^2)}]}$$

Unde fit

$$6\sqrt{2}.mT = [2g+\sqrt{(g^2-k^2)}].\sqrt{[g-\sqrt{(g^2-k^2)}]}$$

Hinc porro

$$72m^2T^2 = [5g^2-k^2+4g\sqrt{(g^2-k^2)}].[g-\sqrt{(g^2-k^2)}]$$

atque porro

$$72m^2T^2 - g^3 - 3gk^2 = -(g^2-k^2)^{3:2}$$

Fiat

Fiat iam

$$g^2 - k^2 = v^2$$
$$-72m^2 T^2 + 4g^3 = b$$

atque ſubſtitutione facta erit

$$v^3 + 3gv^2 = b$$

Qua ergo aequatione reſoluta dabitur v, atque proinde & k. Adhibita vero methodo ſupra (§. 88.) citata, aequatio haec abit in alterutram ſeriem ſequentem. Erit nempe

$$v^2 = g^2 - k^2 = \frac{b}{3g} - \frac{b^{3:2}}{(3g)^{5:2}} + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{b^2}{(3g)^4}$$
$$- \frac{3.7.\, b^{5:2}}{2.4(3g)^{11:2}} + \frac{3.8.10.\, b^3}{2.4.6.(3g)^7} - \frac{3.9.11.13.\, b^{7:2}}{2.4.6.8.(3g)^{17:2}}$$
$$+ \frac{3.10.12.14.16\ b^4}{2.4.6.8.10(3g)^{10}} - \&c.$$

ſiue

$$v^3 = (g^2 - k^2)^{3:2} = b - 3g.b^{2:3} + \tfrac{2}{3}.3.^2 g^2 b^{1:3}$$
$$- \frac{2.3}{3.6}.3^3.g^3 + \frac{2.5.2.3^4.g^4}{3.6.9\, b^{1:3}} - \frac{2.7.4.1.3^5.g^5}{3.6.9.12.\,b^{2:3}} + *$$
$$+ \frac{2.11.8.5.2.1.3^7.g^7}{3.6.9.12.15.18 b^{4:3}} - \frac{2.13.10.7.4.1.2.3^8 g^8}{3.6.9.12.15.18.21.b^{5:3}}$$
$$+ \&c.$$

Alterutra harum ſerierum ſemper eſt plus minuſue conuergens, at nunquam utraque ſimul.

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 122. Quoniam

$$v^2 = g^2 - k^2$$
$$g = a + b$$

erit

$$v^2 = a^2 + b^2 - k^2 + 2ab$$

Sed per trigonometriam

$$a^2 + b^2 - k^2 = 2ab \operatorname{coſ} 2c$$

Unde

$$v^2 = 2ab(1 + \operatorname{coſ} 2c) = 4 \operatorname{coſ} c^2 . ab$$

Quare (§. 48.)

$$v = 2\sqrt{ab} . \operatorname{coſ} c = 2FE.$$

COROLLARIVM II.

§. 123. Cum ergo ſit

$$v = 2FE$$
$$g = (a+b) = 2FG \text{ (§. 40.)}$$

erit

$$k^2 = g^2 - v^2 = 4(Fg^2 - FE^2)$$

COROLLARIVM III.

§. 124. Hinc porro

$$2.FE^3 + 3.Fg.FE^2 = 8.Fg^3 - 18.m^2.T^2$$

ſiue

$$2ab\sqrt{ab}.\operatorname{coſ} c^3 + 3(a+b)ab \operatorname{coſ} c^2 = a+b)^3 - 18m^2 T^2$$

plane ut ſupra (§. 80.)

SCHOLION.

§. 125. Alia ſeries, qua directe eruatur k per ſummam laterum $a+b=g$ deducetur ex ea, qua

qua ſupra inuenimus (§. 85.) ſi debite conuertatur. Eſt vero

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{24.g^{3:2}} - \frac{k^5}{128.g^{7:2}} - \frac{3.k^7}{1024g^{11:2}} - \&c.$$

Diuidatur per $g\sqrt{g}$, atque fiat $4mT : g\sqrt{g} = z$, eritque

$$z = \frac{k}{g} - \frac{k^3}{24.g^3} - \frac{1}{128} \cdot \frac{k^5}{g^5} - \frac{3}{1024} \cdot \frac{k^7}{g^7} - \&c.$$

Ponatur iam

$$\frac{k}{g} = z + \alpha z^3 + \beta z^5 + \gamma z^7 + \&c.$$

atque erit

$$\begin{array}{llllll}
\frac{k^3}{24.g^3} = & \frac{1}{24}z^3 & + \frac{1}{8}\alpha z^5 & + \frac{1}{8}\alpha^2 z^7 & + \frac{1}{8}\gamma z^9 & + \&c. \\
 & & & + \frac{1}{8}\beta .. & + \frac{1}{4}\alpha\beta .. & \\
 & & & & + \frac{1}{24}\alpha\alpha .. & \\
\frac{k^5}{128.g^5} = & & + \frac{1}{128}z^5 & + \frac{5}{128}\alpha z^7 & + \frac{5}{64}\alpha^2 . z^9 & + \&c. \\
 & & & & + \frac{5}{128}\beta .. & \\
\frac{3.k^7}{1024.g^7} = & & & + \frac{3}{1024}z^7 & + \frac{21}{1024}\alpha z^9 & + \&c. \\
\frac{143k^9}{98308g^9} = & & & & + \frac{143}{98308}z^9 & + \&c. \\
 & \&c. & & & &
\end{array}$$

Hinc

Hinc erit

$$\alpha = \frac{1}{24}$$

$$\beta = \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{128} = \frac{1}{196} + \frac{1}{128} = \frac{5}{384}$$

$$\gamma = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{8}\beta + \frac{5}{128}\alpha + \frac{3}{1024} = \frac{59}{9216}$$

&c.

adeoque

$$\frac{k}{g} = z + \frac{1}{24}z^3 + \frac{5}{384}z^5 + \frac{59}{9216}z^7 + \&c.$$

ſiue ſubſtituto valore ipſius $z = 4mT : g\sqrt{g}$

$$k = \frac{4mT}{\sqrt{g}} + \frac{8m^3T^3}{3\,g^{7:2}} + \frac{40.m^5T^5}{3.\,g^{13:2}} + \frac{944.m^7T^7}{9.\,g^{19:2}} + \&c.$$

Cum ſit $m = \frac{1}{n} = \frac{1}{116{,}2648}$ (§. 73.) patet hanc ſeriem tunc tantum eſſe conuergentem, cum tempus T fuerit paucorum dierum.

PROBLEMA XXIV.

§. 126. *Data ſagitta QG & tempore, quo percurritur arcus NQM, inuenire ſummam radiorum* $FN + FM = g$.

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}.\, a+b+\sqrt{ab}.\cos c).\sqrt{(a+b-2\sqrt{ab}.\cos c)}$$

atque

atque

$$\sqrt{ab}.\text{coſ}\zeta = FE = Fg - 2QG = \frac{a+b}{2} - 2QG$$

erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(\tfrac{3}{2}(a+b) - 2QG\right).\sqrt{4QG}$$

Unde

$$a+b = g = \frac{mT\sqrt{2}}{\sqrt{QG}} + \tfrac{4}{3}QG$$

PROBLEMA XXV.

Fig. 5. §. 127. *Dato ſemilatere recto & ordinata NK inuenire tempus a perihelio, ſiue quo cometa percurrit arcum AN.*

SOLVTIO.

Sit ſemilatus rectum $= 2\,AF = s$, ordinata $NK = y$, erit area ſectoris AFN

$$A = (y^3 + 3s^2y) : 12s$$

Dicto tempore $= T$, erit (§. 73.)

$$T = A : m\sqrt{s}$$

adeoque

$$T = \frac{y^3 + 3s^2y}{12ms^{3:2}}$$

COROLLARIVM I.

§. 128. Hinc erit

$$y^3 + 3s^2y = 12ms^{3:2}T$$

quae aequatio, ponendo breuitatis ergo

$$12ms^{3:2}T = q$$

abit

abit in ſeriem

$$y = \frac{q}{3s^2} - \frac{q^3}{3^4.s} + \frac{3q.^5}{3^7.s^{14}} - \frac{3.8.q^7}{2.3^{10}.s^{20}} + \frac{3.11.10.q^9}{2.3.3^{13}.s^{26}} - \frac{3.14.13.12.q^{11}}{2.\ 3.\ 4.3^{16}.s^{32}} + \&c.$$

COROLLARIVM II.

§. 129. Similiter erit per regulam CARDANI

$$\frac{y}{\sqrt{s}} = \sqrt[3]{[6mT + \sqrt{(36m^2T^2 + s^3)}]} + \sqrt[3]{[6mT - \sqrt{(36m^2T^2 + s^2)}]}$$

COROLLARIVM III.

§. 130. Cum ſit

$$AK = y^2 : 2s$$
$$NF = y^2 : 2s + \tfrac{1}{2}s$$

data ordinata y, facile dabitur abſciſſa AK, & radius vector ſiue diſtantia heliocentrica FN, atque hinc porro angulus NFH, cum ſit

$$\text{ſin } NFK = KN : FN$$

PROBLEMA XXVI.

§. 131. *Data diſtantia peribelii AF una cum radio vectore AN, inuenire tempus a peribelio.* Fig. 1.

SOLVTIO.

Cum ſit in genere (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(a+b+\sqrt{ab}.\text{coſ}c).\sqrt{(a+b-2\sqrt{ab}.\text{coſ}c)}$$

 erit

erit hoc caſu

$$a = FN$$
$$b = AF$$
$$\sqrt{ab} = FS$$
$$c = AFS$$

unde

$$\sqrt{ab}.\mathrm{coſ}.c = AF$$

Quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(FN + 2AF).\sqrt{(FN - AF)}$$

COROLLARIVM I.

§. 132. Hinc iterum erit

$$18m^2 T^2 = FN^3 + 3FN^2.AF - 4AF^3$$

ſiue

$$FN^3 + 3AF.FN^2 = 18m^2 T^2 + 4AF^3$$

COROLLARIVM II.

§. 133. Cum per naturam parabolae ſit

$$FN = AF + AK$$

erit ſubſtitutione facta

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(AK + 3AF)\sqrt{AK}$$

unde

$$AK^3 + 6AK^2.AF + 9AK.AF^2 = 18m^2 T^2$$

PROBLEMA XXVII.

Fig. 1. §. 134. *Data diſtantia perihelii AF atque angulo NFA, inuenire tempus a perihelio.*

SOLV-

SOLVTIO.

Dicatur $AF=f$, $AFS=SFN=c$, atque erit (§. 2.)

$$AS=f.\text{tang}\,c=\tfrac{1}{2}NK=\tfrac{1}{2}y$$

unde

$$y=2f\,\text{tang}\,c$$

ſiue dicto ſemilatere recto s, erit

$$y=s.\,\text{tang}\,c$$

Eſt vero (§. 127.)

$$T=\frac{y^3+3s^2y}{12m\,s^{3:2}}$$

Quare ſubſtituendo

$$T=\frac{s\sqrt{s}}{12m}\,(\text{tang}\,c^3+3\,\text{tang}\,c)$$

COROLLARIVM.

§. 135. Hinc erit per regulam CARDANI

$$\text{tang}\,c\sqrt{s}=\sqrt[3]{[6mT+\sqrt{(36m^2T^2+s^2)}]}+\sqrt[3]{[6mT-\sqrt{(36m^2T^2+s^2)}]}$$

PROBLEMA XXVIII.

§. 136. *Inuenire diſtantiam perihelii ſiue ſemilatus rectum parabolae in qua cometa diutiſſime intra orbitam dati cuiusdam planetae commoretur.*

SOLVTIO.

Sit F centrum ſolis, AM orbita cometae, A eius perihelium, MP orbita cometae, tempus, Fig. 12.

 quo

quo percurritur arcus MA eſt ſemimora intra orbitam MP. Quare erit (§. 132.)

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2.AF - 4AF^3$$

adeoque differentiando

$$0 = 36m^2 TdT = 3FM^2.dAF - 12AF^2.dAF$$

unde

$$4AF^2 = FM^2$$
$$FM = 2AF$$

Debet ergo diſtantia planetae helicentrica una eſſe ſemilatus rectum parabolae, quae moram cometae intra orbitam planetae reddat maximam.

PROBLEMA XXIX.

§. 137. *Inuenire tempus morae maximae cometae in parabola incedentis intra datam planetae orbitam.*

SOLVTIO.

Cum ſit

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2.AF - 4AF^3$$

atque pro mora maxima

$$\tfrac{1}{2}FM = AF$$

erit ſubſtitutione facta

$$18m^2T^2 = FM^3(1 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) = 2FM^3$$

unde

$$T = \tfrac{1}{3}n.FM^{3:2}$$

Quae eſt ſemimora maxima, unde mora integra erit $\tfrac{2}{3}n.FM^{3:2}$

COROLLARIVM.

§. 138. Quoniam tempus morae breuiſſimae eſt (§. 103. 105.)

$$T = \tfrac{1}{3}n\sqrt{2}.FM^{3:2}$$

patet,

patet, *moram maximam ad minimam eſſe in ratione* $\sqrt{2}$ *ad* 1.

SCHOLION I.

§. 139. Quodſi pro diſtantia FM ſubſtituantur diſtantiae planetarum mediae, tempus morae maximae cometae in parabola incedentis erit intra orbitam

♄	dierum	2282,66.
♃	- -	919,28.
♂	- - -	145,80.
♁	- -	77,50.
♀	- - -	47,66.
☿	- -	18,67.

SCHOLION II.

§. 140. Utraque mora cum tempore planetae periodico conferri poterit hoc modo. Vidimus (§. 75.) tempus periodicum eſſe

$$= \frac{\pi}{m} . FM^{3:2}$$

Sed mora breuiſſima $= \frac{\sqrt{2}}{3m} . FM^{3:2}$

maxima $= \frac{2}{3m} . FM^{3:2}$

Unde tempus planetae periodicum erit ad moram cometae breuiſſimam $= 3\pi : \sqrt{2} = 20 : 3$, ad maximam vero $= 3\pi : 2 = 33 : 7$.

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO III.

Perluſtrantur motus cometarum adparentiae, atque varii exponuntur modi orbitam veram ex obſeruationibus determinandi, ſi iſta ſit parabolica.

DEFINITIO III.

§. 141. *Notae characteriſticae orbitae cometarum ſiue differentiae ſpecificae ſunt illa capita, quibus orbita cuiuslibet cometae a cunctis ceteris diſcernitur.*

SCHOLION I.

§. 142. Duo ſunt capita, in quibus ſingulae orbitae congruunt. Primo enim oportet ſit ſectio conica, atque ſecundo haec ita poſita eſt, ut eius focus cum centro ſolis coincidat. Contra ea dantur ſex capita, quibus ſingulae orbitae ab inuicem ſunt diſtinguendae, ſuntque

1°. *Diſtantia perihelii a ſole.*

2°. *Ratio inter hanc diſtantiam & ſemilatus rectum*, ſiue quod eodem redit, *tempus periodicum*, ſi orbita ſit elliptica vel circularis.

3°. *Tem-*

3°. *Tempus, quo cometa fuit in perihelio, vel in dato orbitae ſuae puncto haeſit.*

4°. *Inclinatio orbitae ad planum eccliptices.*

5°. *Situs lineae nodorum ſiue longitudo nodi aſcendentis heliocentrica.*

6°. *Elongatio axeos orbitae a linea nodorum, ſiue longitudo perihelii heliocentrica.*

Prima duo capita ipſam ſectionis conicae ſpeciem eiuſque magnitudinem veram, caput tertium epocham, reliqua tria ſitum orbitae ratione eccliptieae ſuppeditant, ut adeo ſi ſingula adhibeantur, orbita cometae ab omnibus aliis diſtinguatur.

SCHOLION II.

§. 143. Ad definienda ſex iſta capita tres requiruntur obſeruationes ſiue tria loca cometae geocentrica, longitudines puto & latitudines e tellure obſeruandae. Conſtat vero partem orbitae quam cometa percurrit, dum ſe terricolis ſpectandum ſiſtit, admodum eſſe exiguam. Hinc fit, ut caput ſecundum ſiue tempus periodicum ex tribus obſeruationibus ſibi admodum vicinis vix definiri poſſit. Quodſi vero redeat cometa iam pridem obſeruatus, datur tempus periodicum, atque ex hoc curatius definitur longitudo axis maioris ellipſeos. (§. 72.)

SCHOLION III.

§. 144. Porro obſeruationibus conſtat, orbitas cometarum, ſi quidem ellipticae ſint, admodum eſſe oblongas, ut adeo exigua illa pars,

quam tempore viſibilitatis percurrunt, absque notabili errore cum parte orbitae parabolicae confundatur. Etenim cum tempus periodicum plerumque ſit plurium ſaeculorum, aphelium non poteſt non a ſole eſſe remotiſſimum. Contra ea perihelia eorum cometarum, qui nobis ſunt viſibiles, fere ſemper cadunt intra orbitam telluris, adeoque ſoli ſunt maxime vicina, quo fit ut ratio inter diſtantiam perihelii a ſole & ſemilatus rectum ab ea fere non differat, quae obtinet, ſi orbita fuerit parabolica.

THEOREMA VIII.

Fig. 15. §. 145. *Si cometa in parabola incedens obſeruetur in utroque nodo N, n, e tellure in E, e haerente, dabitur ſitus & longitudo lineae nodorum, diſtantia perihelii a ſole & ſitus axeos parabolae, ſed incognita remanet orbitae inclinatio.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ob data puncta ecclipticae, quae cometa e tellure traiicere viſus eſt, datur ſitus rectarum EN, en. Porro ob datum temporis interuallum, quo cometa ex N peruenit in n, dabitur longitudo lineae nodorum Nn (§. 117.) eritque

$$Nn^{3:2} = 3\sqrt{2}.m.T$$

Quare quaeſtio eo redit, ut per centrum ſolis F agatur recta cuius pars Nn a rectis EN, en poſitione datis abſciſſa ſit datae longitudinis. Hac vero ducta dabitur ſitus axeos & diſtantia perihelii AF, adeoque tota parabola. Contra ea cum puncta obſeruata N, n ſint in plano

eclip-

ecclipticae, ex iis ſolis angulus inclinationis definiri nequit, quare inclinatio remanet indefinita.

COROLLARIVM.

§. 146. Quodſi ergo accedat obſeruatio tertia non modo dabitur inclinatio orbitae, verum & cum quadruplex ſit problematis ſolutio, definiri poterit, quaenam reapſe obtineat.

SCHOLION.

§. 147. Caſus huius theorematis utique rariſſimus eſt. Plerumque enim vel nodorum alteruter nimis eſt a tellure remotus, vel viſibilitati cometae in ipſo haerentis obſtat ſolis vicinitas.

THEOREMA IX.

§. 148. *Si cometa e tellure bis obſeruetur, atque in alterutra obſeruatione verſetur in perihelio orbitae parabolicae, dabitur tota orbita eiuſque ſitus.*

DEMONSTRATIO.

Aſſumta enim diſtantia geocentrica pro ea obſeruatione, quae tempore celebrati perihelii facta eſt, dabitur diſtantia heliocentrica adeoque diſtantia perihelii & ſitus axeos. Unde hoc ipſo dabitur orbita atque elongatio cometae a perihelio tempore obſeruationis alterius, ſiue punctum N. Quodſi ergo parabola circa axin rotetur, punctum N incidere debet in

 rectam

rectam e ſecundo loco telluris in ſecundum locum cometae ductam, cuiuſque poſitio data eſt. Quod ſi fuerit, diſtantia geocentrica aſſumta vera eſt. Sin minus alia aſſumenda, donec huic conditioni ſatisfiat. Quod cum neceſſario alicubi fieri debeat, conſequens eſt problema eſſe determinatum, atque duas obſeruationes determinandae orbitae cometae ſufficere, ſi iſte tempore alterutrius obſeruationis extiterit in perihelio.

SCHOLION.

Fig. 6. §. 149. Theorema hoc ad quaelibet duo alia cometae loca N, M extenditur, ſi detur alteruter angulorum RMF, RNF, ſub quibus orbita radios vectores FM, FN ſecat.

THEOREMA X.

§. 150. *Si in globo caeleſti per locum ſolis & cometae geocentricum ducatur circulus ſphaerae maximus, hic ſimul tranſibit per locum telluris & cometae heliocentricum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim circulus iſte refert ſectionem ſphaerae caeleſtis a plano factam, quod tranſit per centra ſolis, telluris atque cometae. Unde cum rectae, quae iungunt iſta centra ſint in hoc plano, atque ad fixas uſque productae ibidem referant loca telluris & cometae e ſole, nec non loca ſolis & cometae e tellure viſa, conſtat propoſitum.

COROL-

COROLLARIVM.

§. 151. Eandem ob cauſſam, cum cometa moueatur in plano, quod per centrum ſolis tranſit, loca ſingula cometae heliocentrica erunt in circulo ſpharae maximo.

SCHOLION.

§. 152. Uſui eſſe poterit hoc theorema, ſi Fig. 7. inueniatur formula concinna rationem inter angulos NFQ, QFM & tempora exhibens quibus percurruntur arcus NQ, QM. Etenim hi anguli ſunt arcus circuli, qui loca cometae heliocentrica refert, a circulis e locis ſolis per loca cometae geocentrica ductis intercepti.

PROBLEMA XXX.

§. 153. *Si dentur quatuor obſeruationes cometae exiguo interuallo temporis ab inuicem remotae, orbitae ſitum & magnitudinem approximando definire, ſi haec fuerit parabolica.*

SOLVTIO.

Quoniam ob exigua temporum interualla arcus a cometa a prima obſeruatione ad quartam percurſus inſtar rectae haberi poteſt, aequabili celeritate percurſa, orbita cometae ſiue quatuor eius loca obſeruata concipiantur in planum eccliptices proiecta, ſintque H, I, K, L. Porro rectae e locis telluris in loca cometae Fig. 8. ductae ſint EH, EI, AK, AL; quae cum referant cometae longitudines geocentricas, poſitione ſunt datae. Unde ergo delabimur ad

Lem-

Lemma XVIII, (§. 51.) cum ducenda ſit recta HL talis, quae a rectis AL, AK, EI, EH poſitione datis in tres partes LK, KI, IH temporibus proportionales ſecetur.

Hac recta conſtructa retineantur puncta extrema H, L, atque in ſubſidium vocatis latitudinibus cometae geocentricis, erectis e punctis H, L perpendicularibus, definientur duo puncta orbitae cometae a veris haud ita multum abhorrentia. Unde per Lemma V. dabitur tota orbita (§. 26.). Cumque itidem hinc detur tempus per Problema XV. (§. 83.) experiri datur, an cum tempore obſeruato congruat, ſiue plus minuſue ab eo differat. Poſterius ſi fuerit, ut vel neceſſario eſſe ſolet, retenta orbita hoc modo conſtructa quaerantur in ea loca cometae, in quibus iſte eſſe debuiſſet tempore utriuſque obſeruationis intermediae, ſi tempora obſeruata in computata
Fig. 9. mutentur. Quo facto dabitur quadrilaterum EFGH, ab eo quod vera cometae loca efformant longe minus diſcrepans ac recta primo aſſumta. Hoc vero in eclipticam eſt proiiciendum, atque retentis angulis & ratione laterum quaeſtio eo reducitur, ut quadrilaterum ſimile quatuor rectis AE, AG, BF, BH poſitione datis inſcribatur. Quod fiet ope Lemmatis IX. (§. 54.). Retentis iterum duobus punctis extremis EH eodem modo quaeratur ſitus orbitae, quae a vera longe minus aberrabit. Hac ratione cum ulterius progredi liceat, orbita approximando definietur qualis reipſa eſt.

SCHO-

SCHOLION.

§. 154. Quod in hoc problemate aſſumitur, cometam nempe percurrere rectam aequali celeritate, idem alio modo aſſumere licet. Sint duo cometae loca extrema N, M ducatur Fig. 7. chorda NM, atque haec ponatur a cometa percurſa, ita ut dum fuerit in dato quouis loco orbitae intermedio Q, ducta FQ, locus iſte transferatur in E. At vero duo hinc enaſcuntur incommoda. Primo enim punctum E aliam habet longitudinem & latitudinem geocentricam ac locus cometae reapſe obſeruatus Q. Porro tempora quibus percurruntur arcus MQ, QM partibus chordae abſciſſis ME, EN haud perfecte ſunt proportionalia. Patet tamen ex Lemmate XVII. (§. 49. 50.) rationem inter areas ſectorum NFQ, QFM & abſciſſas NE, EM perparum differre, quoties angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat. Quare poſteriori incommodo ita obuiam ire datur, ut primo abſciſſae NE, EM ſumantur eſſe temporibus proportionales. Quo ipſo proxime definietur orbita, atque ratio inter abſciſſas NE, EM curatius definiri poterit, quo calculus inſtaurari queat. Priori incommodo variae adferri poſſunt medelae. Aut enim, quod fecit ſummus EVLERVS ex diſtantia inter utramque extremam NF, MF media atque tentando definienda, atque ex temporibus quibus percurruntur arcus MQ, QN proxime determinabitur ſagitta QE, ex lapſu corporum in ſolem. Quodſi tempora iſta fere ſint aequalia, dabitur ſagitta maxima QG = QE per formulam

Fig. 6. lam §. 92. qua ceu proxime vera uti licet. At
Fig. 7. cum puncto E eatenus tantum opus ſit, quatenus recta ex eo in centrum telluris ducta in planum eccliptices proiicienda eſt, exactius voto ſatisfiet, ſi in vicem plani eccliptices eligatur aliud planum ſcopo adcommodandum. Facile vero patet utramque rectam e centro telluris in puncta Q & E ductam atque in planum iſtud proiectam coincidere debere. Huic vero fini ſatisfaciet quodlibet planum, quod normaliter tranſeat per planum in quo eodem tempore verſantur ſol, cometa & tellus. Quod ut fiat euidentius, unaque exponatur methodus orbitam cometae definiendi, ſequens adponemus

PROBLEMA XXXI.

§. 155. *Datis tribus cometae in parabola incedentis locis geocentricis una cum interuallo temporum, inuenire orbitae ſitum & magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig. 16. Sint E, C, D tria cometae loca, perpendicularium ope in planum eccliptices proiecta. Tellus eodem tempore ſit in A, T, B. In locum telluris medium T e ſole S agatur recta ST, atque ad hanc normalis TR. Ad hanc ex utroque loco telluris extremo A, B demittantantur normales Aα, Bϐ, ſimiliterque e locis cometae E, C, D normales EPG, CQK, DRH. Sint porro PG, QK, RH aequales eleuationi cometae in E, C, D ſupra planum eccliptica, atque agantur rectae αH, TK, ϐG.

Hac

Hac ratione planum αRHG ſpectari poterit ceu ad planum eccliptices αRDS, & in ſpecie ad rectam TS normale, atque referet locorum telluris & cometae α, T, β, G, K, H proiectionem orthographicam. Patetque rectam TK non modo eſſe proiectionem rectae e loco telluris medio T in locum cometae puncto C normaliter imminentis, verum & lineae e centro ſolis S in eundem hunc cometae locum ductae, adeoque totius plani, in quo eodem tempore commorantur ſol, cometa, tellus.

Quoniam rectae AD, TC, BE ſunt longitudines cometae geocentricae, TS longitudo ſolis vel telluris tempore obſeruationis mediae, BS, AS longitudines ſolis tempore obſeruationum extremarum, hinc dabuntur

$$\alpha T = AS . \sin TSA$$
$$\beta T = BS . \sin TSB$$

Porro anguli ADR, TCQ, BEP ſunt differentiae inter longitudines cometae & longitudinem ſolis tempore obſeruationis mediae, quare ſunt dati, eritque

$$\beta P = BE . \sin BEP$$
$$TQ = TC . \sin TCQ$$
$$\alpha R = AD . \sin ADR$$

Sint porro latitudines cometae geocentricae in B, T, A $= \lambda, \lambda', \lambda''$, erit

$$PG = BE . \tan \lambda$$
$$QK = TC . \tan \lambda'$$
$$RH = AD . \tan \lambda''$$

Unde iam habetur

$$\tan G\beta P = \tan\lambda : \sin BEP$$
$$\tan KTQ = \tan\lambda' : \sin TCQ$$
$$\tan H\alpha R = \tan\lambda'' : \sin ADR$$

Dan-

Dantur itaque in plano normali aſſumto

rectae αT, $T\beta$, $\alpha\beta$
anguli $G\beta P$, KTQ, $H\alpha R$

Vocetur ergo

$$\alpha T = g \quad G\beta P = \beta$$
$$\beta T = b \quad KTQ = \tau$$
$$H\alpha R = \alpha$$

Nectantur puncta G, H, eritque recta GH proiectio chordae, cuius arcum percurrit cometa interuallo temporis utriusque obſeruationis extremae. Cumque TK ſit proiectio radii vectoris medii, erit KL proiectio ſagittae, & tempora proxime ſunt in ratione

$$GL:LH = PO:OR = p:q.$$

Quodſi peracto calculo eundem inſtaurare operae pretium ſit, haec ratio facile curatius definietur.

Fiat iam

$$TO = x$$
$$PO = y$$

erit

$$OR = yq:p$$

Porro

$$OL = x.\tan\tau$$
$$\alpha R = g + x + qy:p$$
$$\beta P = x - b - y$$
$$HR = (g + x + qy:p)\tan\alpha$$
$$PG = (x - b - y)\tan\beta$$

Sed

$$(OL - GP):(RH - OL) = p:q$$

Quare

Quare

$$q x \tang \tau + q(x-b-y) \tang \beta = p(g+x+\frac{qy}{p}). \tang \alpha - px \tang \tau.$$

ſiue debita reductione facta

$$y = \frac{(q+p)\tang \tau - q \tang \beta - p \tang \alpha}{q(\tang \alpha - \tang \beta)} . x + \frac{qb \tang \beta - pq \tang \alpha}{q(\tang \alpha - \tang \beta)}$$

Haec formula in numeris eſt computanda, unde faciemus breuiſſime

$$y = \gamma x + \delta$$

Datur ergo $y = \mathrm{PO}$ per $x = \mathrm{TO}$. Unde porro erit

$$\beta \mathrm{P} = x - \gamma x - \delta - b$$

$$\alpha \mathrm{R} = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p} + g$$

Quare

$$\mathrm{PE} = \mathrm{TW} = (x - \gamma x - \delta - b) \cot \mathrm{BEP} + \beta \mathrm{B}$$

$$\mathrm{RD} = \mathrm{TX} = (x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p} + g) \cot \mathrm{ADR} + \mathrm{A}\alpha$$

Cum vero & hae formulae computandae ſint in numeris, ita faciemus

$$\frac{\mathrm{TW}+\mathrm{TX}}{2} = \mathrm{TF} = \varkappa x + \mu$$

$$\mathrm{TX} - \mathrm{TW} = \mathrm{WX} = \nu x + \varrho = \mathrm{EV}$$

$$\mathrm{FS} = \mathrm{TS} - \mathrm{TF} = \phi x + \omega$$

 Porro

Porro eſt

$$WE = TP = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = TR = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

Hinc

$$VD = \frac{q+p}{p}(\gamma x + \delta) = \varepsilon x + \eta \text{ breuitatis ergo}$$

Sed

$$VE = \nu x + \varrho$$

Unde

$$ED^2 = (\varepsilon^2 + \nu^2)x^2 + (2\varepsilon\eta + 2\nu\varrho)x + \eta^2 + \varrho^2$$

Porro

$$GP = (x - \gamma x - \delta - b)\,\text{tang}\,\beta$$

$$RH = (x + \frac{\gamma q x}{p} + \frac{\delta q}{p} + g)\,\text{tang}\,\alpha$$

Unde differentia altitudinum cometae extremarum RH—GP efferri poterit per

$$rx + s$$

Dabitur ergo hinc quadratum longitudinis chordae, quam cometa in orbita ſua percurrit

$$ED^2 + (RH - GP)^2 = Ax^2 + Bx + C$$

Cumque ſit

$$WE = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

erit

$$\frac{WE + XD}{2} = FZ = Dx + E$$

Sed

$$FS = \varphi x + \omega$$

Quare

Quare dimidium ſummae diſtantiarum cometae extremarum a ſole erit

$$=\surd[(\phi x+\omega)^2+(Dx+E)^2+LO^2]$$

Ex hac diſtantia & longitudine chordae & tempore quo ab inuicem diſtant obſeruationes extremae dabitur x per problema XV. (§. 83.)

Quodſi chorda haud fuerit magna erit proxime

$$Ax^2+Bx+C=\frac{8m^2T^2}{\surd[(\phi x+\omega)^2+(Dx+E)^2+LO^2]}$$

Quae eſt aequatio ſexti gradus.

Inuenta iam $x=TO$, facile dabitur $y=PO$, atque proinde OR, & cunctae quantitates, quae ad definiendum ſitum chordae ED in eclipticam proiectae adeoque & chordae verae quicquam faciunt. Cumque radii vectores extremi ſint

$$b=\surd(SW^2+WE^2+PG^2)$$
$$a=\surd(SX^2+XD^2+RH^2)$$

tota orbita determinabitur per Lemmata VIII, X, XI. huiuſque Corollarium I, &c.

Aliter, conſtructione.

Quoniam prolixiori hoc calculo orbita cometae tantummodo proxime determinatur, niſi eum inſtaurare volueris, conſtructione rem omnem breuius atque commodius abſoluere licet.

Sit ergo S centrum ſolis, T locus telluris tempore obſeruationis mediae, B, A eiuſdem loca tempore obſeruationis primae & tertiae. Ex datis cometae longitudinibus geocentricis

ducentur rectae TC, AD, BE. Porro ducta TR ad TS normali, demittantur Aα, Bϵ ut in ſolutione prima, ſimiliterque vel calculo vel conſtructione definientur anguli GϵP, KTQ, HαR, eritque ut antea TK proiectio rectarum e centro ſolis & telluris in locum cometae medium ductarum.

Aſſumatur iam in recta TK punctum quodlibet L, quod referat punctum interſectionis chordae a cometa percurſae & radii vectoris medii in ipſa cometae orbita. Quodſi hoc punctum L forte fortuna rite fuerit aſſumtum, vera quoque determinabitur cometae orbita, ſin minus innoteſcet aberratio, atque aliud tentando erit eligendum. Ipſa vero conſtructio pro ſingulis eſt eadem, quare ne figura nimium quantum oneretur rectis, ſitum puncti L aſſumimus verum, eundemque ceu incertum tractabimus.

Per punctum L agatur recta GLH talis, ut partes GL, LH ſint in ratione temporum, atque e punctis G, H demittantur GPE, HRD ad rectam αR normales. Quo facto triangula ϵGP, αHR in planum eccliptices erunt translata, eruntque ϵEP, αDR, atque ducta ED erit chorda a cometa percurſa in planum eccliptices proiecta.

E puncto aſſumto L agatur LZ ad αR normalis, eritque

$$GL:LH = EZ:ZD$$

atque puncta S, Z, C erunt in una eademque recta, quae radium vectorem medium refert in eccliptieam proiectum, ſi punctum L rite fuerit

fuerit aſſumtum. At cum hoc incertum ſit, nectantur loca telluris A, B, atque e puncto interſectionis t agatur recta tZ per punctum Z. Haec recta talis erit, ut quicunque fuerit ſitus chordae a cometae percurſae atque in ecclipticam proiectae, recta tZ eam ſecet in eadem ratione in qua ſecta eſt recta EZD, adeoque proxime in ratione temporum.

Aſſumtis itaque in recta tZ punctis quibusuis Z facile ducentur totidem rectae EZD a rectis AD, BE, tZ in data ratione temporum ſectae.

Eiuſmodi recta cum ſit ED, ope latitudinum geocentricarum facile e punctis E, D erigentur normales, quae erunt = GP, HR, atque harum ſummitates longitudine chordae a cometa percurſae inter ſe diſtare debent, ſimulque ſummitatum iſtarum a centro ſolis S diſtantia referet radios vectores extremos. His vero diſtantiis inuentis ope formularum Problematis XV. (§. 83.) vel ope ſcalae celeritatum parabolicarum (§. 112. ſeqq.) definietur tempus, quo cometa percurrere debuiſſet chordam ope puncti aſſumti Z erutam. Quodſi ergo hoc tempus cum tempore inter primam & tertiam obſeruationem elapſum congruat, punctum Z rite fuit aſſumtum, ſin minus, notetur differentia, atque in recta tZ ſucceſſiue aſſumantur alia puncta vicem ipſius Z ſubitura. Unde totidem dabuntur temporis obſeruati & conſtructione eruti differentiae. Quo facto diſtantiae tZ ſpectentur ut abſciſſae, atque differentiae temporum ipſis inſtar ordinatarum adplicentur, quo duci poſſit curua, quae re-

ctam tZ in eo loco ſecabit, cui verum punctum Z reſpondet. Per ſe vero patet puncta Z ita eſſe aſſumenda ut differentiae temporum erutae ſint & poſitiuae & negatiuae.

Inuento iam vero puncto Z, conſtructionem inſtaurando ducetur vera chorda proiecta ED, qua data facillime abſoluetur conſtructio totius orbitae.

Hac vero conſtructa facile examini ſubiicietur ratio inter partes rectae GL, LH, an temporibus ſint proportionales, vel an notabilius differant. Quodſi differant, vera ratio curatius definietur, atque conſtructio vel calculus inſtaurari poterit, quo exactius eruatur orbitae magnitudo & ſitus.

SCHOLION I.

§. 156. Quod conſtructionem hanc reddit prolixiorem eſt orbitae cometae ad ecclipticam inclinatio. Hoc enim fit, ut altitudines cometae ſupra puncta E, D duplici modo in planum ecclipticae ſint transferendae, quo determinari poſſit chordae a cometa percurſae longitudo, atque a ſole S diſtantia ſiue radii vectores extremi. Ceterum prolixitas iſta compendio, quod in computanda temporum differentia ſuppeditat ſcala celeritatum parabolicarum, magna ex parte compenſatur.

SCHOLION II.

§. 157. Quoniam in ſolutione poſteriori punctum Z tentando eſt quaerendum, eius quaedam criteria in medium proferre haud inutile

utile erit. Huc facit Theorema III. (§. 76. ſeqq.) quo ex diſtantia cometae heliocentrica definitur ipſius celeritas, atque cum celeritate planetae ad eandem diſtantiam in circulo gyrantis confertur. Quoniam arcus vel chordae a prima obſeruatione ad tertiam percurſae plerumque ſunt exiguae, chorda a cometa percurſa cum ea quam eodem tempore percurrit tellus, quaeque eſt AB quodammodo conferri poterit. Ponamus v. gr. cometam eſſe in T, atque facile patet, chordam ab eo percurſam debere eſſe proxime $=AB.\sqrt{2}$. (§. cit.) quod eſſe nequit, quia cadere debet intra rectas AD, BE. Quodſi punctum Z aſſumatur intra rectam tI, cometae a ſole diſtantia minuitur, adeoque augetur longitudo chordae, quam percurrere debuiſſet. Cum vero rectae AD, BI in I coincidant, ſpatium longe fit anguſtius, eo ergo minus cometa intra tI erit locandus, atque facile patet punctum Z debere eſſe puncto I longe remotius. Aſſumto puncto Z ſitus chordae proiectae ED oculo ſolo iudice plerumque proxime colligitur, eiuſque longitudo cum AB & diſtantia a ſole confertur. Similiter rectae AD, ϬE, tZ in I ita ſunt poſitae, ut quae media eſſe deberet extrema ſit, quo ipſo ſitus puncti K ibidem neceſſario cuadit impoſſibilis.

PROBLEMA XXXII.

§. 158. *Si orbita cometae parabolica iam proxime fuerit definita, eandem curatius definire.*

SOLVTIO.

Quoniam proxime in numeris dantur diſtantiae cometae geocentricae curtatae AD, TC, BE, ponemus ſingulas eſſe debito minores, atque differentiam qua augendae ſunt, ut in veras abeant, ita eſſe exiguam, ut dignitates earum prima ſuperiores abiici tuto poſſint. Hac ratione inſtar differentialium eas tractare licet, computo in numeris abſoluendo debite adiiciendarum. Ipſe vero computus ita erit inſtituendus, ut ex aſſumtis diſtantiis eruantur tempora intra primam & ſecundam, ſecundam & tertiam, tertiam denique & primam obſeruationem elapſa. Quo facto tempora computata cum obſeruatis conferri poterunt, atque hac ratione deueniemus ad tres aequationes, quibus eruentur differentiae diſtantiarum aſſumtarum & verarum AD, TC, BE, aſſumtis addendae vel ab iis ſubtrahendae, prout poſitiuae vel negatiuae fuerint.

Computum vero, quo eruentur iſtae aequationes, exemplo illuſtrabimus ſequentem in modum.

Fig. 17. Sit S ſol, T, t loca telluris, punctis K, k immineant loca cometae C, c, rectae TK, tk erunt eiusdem longitudines & anguli CTK, ctk erunt latitudines geocentricae. Producantur KT, kt in A, atque agatur AS, & CP ipſi Kk parallela. Fiat iam

$AT = \alpha$	$AK = K$	$CTK = C$	$TS = T$
$At = \beta$	$Ak = k$	$ctk = \gamma$	$tS = \tau$
$TAt = \omega$	$TK = K'$	$CTS = e$	
	$tk = k'$	$ctS = f$	

atque

atque erit

$$Cc^2 = K^2 + k^2 - 2Kk\cos\omega + K'^2\tan C^2 + k'^2\tan c^2 - 2k'K'.tc.tC$$

Porro eſt

$$CS^2 = T^2 + K'^2\sec C^2 - 2TK'.\sec C.\cos e$$
$$cS^2 = \tau^2 + k' \sec c^2 - 2\tau k' \sec c.\cos f$$

Hae formulae computandae ſunt in numeris. At vero cum ipſis adiicienda ſint differentialia, notabimus, quantitates K, K', k, k' ſpectandas eſſe ceu variabiles, atque facile patet, ob

$$K = K' + \alpha$$
$$k = k' + \beta$$

differentialia dK, dK', nec non dk, dk' eſſe eadem, quare differentiando erit

$$d(Cc) = (K + K'tC^2 - k\cos\omega - k'tc.tC)\,dK : Cc + (k - K\cos\omega + k'tc^2 - K'tc.tC)\,dk : Cc$$
$$d(CS) = (K'\sec C^2 - T.\sec C.\cos e)\,dK : CS$$
$$d(cS) = (k'\sec c - \tau\sec c.\cos f)\,dk : cS$$

His iterum in numeris computatis, contractiores euadunt, eritque

$$d(Cc) = mdK + ndk$$
$$d(CS) = pdK$$
$$d(cS) = q.dk.$$

At iam per CS, cS, cC dabitur tempus per formulam (§. 83.) eritque

$$3\sqrt{2}.m\mathit{7} = \left(\frac{CS + cS + cC}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{CS + cS - cC}{2}\right)^{3:2}$$

Sed cum diſtantiae geocentricae curtatae TK, tk aſſumtae a veris differant, tempus 7, quod dat haec formula ab obſeruato differet. Qua-

re, ut $\mathfrak{T}$ ſit tempus obſeruatum, formulae adiiciendum erit differentiale, eritque

$$12m\mathfrak{T} = \left(\frac{CS + cS + cC}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{CS + cS - cC}{2}\right)^{3:2}$$
$$+ \tfrac{3}{2}(CS + cS + cC)^{1:2}.(dCS + d.cS + dcC)$$
$$- \tfrac{3}{2}(CS + cS - cC)^{1:2}.(dCS + dcS - dcC)$$

Dantur vero CS, cS, cC in numeris, pariterque & earum differentialia per dK, dk. Quare hac ratione dabitur aequatio inter dK, dk.

Aſſumto porro tertio loco cometae, combinando dabuntur inſuper duae aequationes inter dk, $d\mathfrak{k}$, & dK, $d\mathfrak{k}$. quibus ergo differentiae hae definientur. Quodſi peracto calculo deprehendantur notabiles, calculus eodem mo-
Fig. 16. do inſtaurabitur, aſſumendo diſtantias AD, TC, BE prima hac operatione correctas.

PROBLEMA XXXIV.

§. 159. *Datis duobus cometae locis geocentricis ſibi admodum vicinis, atque diſtantia cometae geocentrica tempore alterutrius obſeruationis, inuenire ſitum orbitae eiusque magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig. 17. Sit S centrum ſolis, T, t loca telluris, C, c loca cometae, K, k eadem in ecclipticam proiecta, erunt TK, tk eius longitudines, CTK, ctk latitudines obſeruatae. Detur iam diſtantia TC, adeoque & TK = TC. coſCTK. E punctis K, T in rectam tk demittantur normales KQ,

KQ, TR atque ducantur AS, CP ut in problemate praecedente. Porro fiat

$$TK = x \quad CTK = \lambda$$
$$Qk = y \quad ctk = \Lambda$$
$$tR = \alpha \quad TAt = \omega$$
$$AT = p \quad CTS = b$$
$$TS = r$$

Quoniam latitudines geocentricae λ, Λ parum inter ſe differunt, ponatur

$$\text{tang}\Lambda = \text{tang}\lambda + q$$

eruntque y, α, q, ω, quantitates admodum exiguae, ob aſſumtam locorum T, t vel C, c vicinitatem.

Hinc iam erit

$$AK = x + p$$
$$KQ = (x+p)\,\text{ſin}\,\omega$$
$$Kk^2 = y^2 + (x+p)^2\,\text{ſin}\,\omega^2$$

Porro habebitur

$$AR = p\,\text{coſin}\,\omega$$
$$AQ = (x+p)\,\text{coſ}\,\omega$$
$$Ak = (x+p)\,\text{coſ}\,\omega + y$$
$$Rk = (x+p)\,\text{coſ}\,\omega - p\,\text{coſ}\,\omega + y = x\,\text{coſ}\,\omega + y$$
$$tk = x\,\text{coſ}\,\omega + y - \alpha$$

adeoque

$$ck = [x\,\text{coſ}\,\omega + y - \alpha].(\text{tang}\lambda + q)$$
$$CK = x\,\text{tang}\,\lambda$$

Quare

$$cP = x(\text{coſ}\,\omega - 1)\,\text{tang}\,\lambda + (y-\alpha).\,\text{tang}\,\lambda + x\,\text{coſ}\,\omega.q + (y-\alpha)q$$

ſiue

$$cP = y(\text{tang}\,\lambda + q) - \alpha(\text{tang}\,\lambda + q) - x(1 - \text{coſ}\,\omega)\,\text{tang}\,\lambda + xq$$

Pro

Pro qua formula ſubſtituemus breuitatis ergo

$$cP = Ay + Bx - C$$

Eſt vero

$$Cc^2 = cP^2 + Kk^2$$

Quare erit

$$\begin{aligned} Cc^2 = {} & y^2 + (x+p)^2 \sin\omega^2 \quad = Dy^2 + Ey + F \\ & + A^2y^2 + 2ABy x + C^2 \\ & + 2ACy - 2BCx. \\ & + B^2x^2 \end{aligned}$$

Porro erit

$$CS^2 = r^2 + x^2 \sec\lambda^2 - 2rx \sec\lambda . \cos b$$

At iam per ſolutionem ſecundam Problematis XV. (§. 83.) eſt

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{k[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}}{\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}}$$

ſiue cum chorda k ſit admodum exigua, atque proxime $a = b$, erit abſque notabili errore

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{3k\sqrt{a}}{2}$$

$$k = \sqrt{8}.mT : \sqrt{a}$$

ſiue

$$cC = \frac{\sqrt{8}.mT}{\sqrt{CS}}$$

adeoque ſubſtitutis valoribus

$$Dy^2 + Ey + F = \frac{8m^2T^2}{\sqrt{(r^2 + x^2 \sec\lambda^2 - 2rx \sec\lambda . \cos b)}}$$

Qua ergo aequatione, data diſtantia x, dabitur y, adeoque & ſitus chordae proiectae Kk. Hac vero data facile dabitur tota orbita.

SCHO-

SCHOLION.

§. 160. Cum aequatio, ad quam tandem deuenimus, quadratica ſit, dabuntur duo ipſius y valores, adeoque tertia obſeruatio erit adhibenda, quo definiri queat, quali reapſe ſit utendum. Porro aſſumſimus diſtantiam x eſſe datam. Quodſi vero indeterminata ſit, ſucceſſiue alia atque alia aſſumi poterit, usque dum valor ipſius y euadat imaginarius. Dantur ergo limites quos diſtantia x excedere nequit, atque inueniuntur, ſi in ultima aequatione ponatur $y = o$. Quo facto aequatio abit in aliam, in qua diſtantia x ad ſextam dimenſionem aſſurgit.

PROBLEMA XXXV.

§. 161. *Dato ſitu orbitae cometae parabolicae, inuenire ſitum & proprietates in planum eccliptices proiectae.*

SOLVTIO.

Sit F centrum ſolis atque proinde focus orbitae, Nn linea nodorum, NQn orbita ipſa ad planum eccliptices ſub angulo quocunque inclinata, A perihelium, AFB axis. Aſſumto puncto quolibet Q, ducatur QP ad Nn normalis, atque fiat QP ad qP in ratione ſinus totius ad coſinum anguli eleuationis, punctum q erit in orbita proiecta, ipſique punctum Q normaliter imminet. Fig. 18.

Quodſi

Quodſi iam Q ſit culmen orbitae, directio utriusque parabolae in Q, q erit lineae nodorum parallela. Bifariam ſecetur Nn in G, ducantur FQ, Fq, GQ, Gq, erit GQ axi AB, & Gq axi orbitae proiectae aB parallela, atque $FQ = QG$, $Fq = qG$, $FP = PG$.

Porro erit FQ ad Fq ut ſinus totus ad coſinum latitudinis heliocentricae ipſius culminis Q.

Similiter ob $NG = Gn$, & Gq axi aB parallelam, recta qF tranſit per focum orbitae proiectae f, atque eſt

$$Nn^2 = 16.FQ^2 = 16.Fq.fq$$

unde

$$Fq : FQ = FQ : fq.$$

Cumque utraque parabola in Q & q ſit lineae nodorum Nn parallela, anguli, quos faciunt cum rectis FQ, Fq erunt angulis QGF, qGF aequales, adeoque

$$AF = FQ . \text{ſin}\, QGF^2 = PQ^2 : FQ$$
$$af = fq . \text{ſin}\, qGF^2 = fq . Pq^2 : Fq^2$$

Dicto angulo inclinationis $= \eta$ erit

$$Pq = PQ . \text{coſ}\eta$$

adeoque

$$af = fq . PQ^2 . \text{coſ}\eta^2 : Fq^2$$

unde porro

$$AF : af = Fq^2 : FQ . \text{coſ}\eta^2 . fq$$

Eſt vero

$$fq = FQ^2 : Fq$$

Quare

$$AF : af = Fq^3 : FQ^3 . \text{coſ}\eta^2$$

Cum-

Cumque Fq:FQ ſit coſinus latitudinis heliocentricae puncti Q dicta hac latitudine $= \lambda$, erit

$$AF : af = \cos\lambda^3 : \cos\eta^2$$

$$\surd af = \frac{\surd AF \cdot \cos\eta}{\cos\lambda^{3:2}}$$

Quodſi iam a radio vectore deſcribatur area quaedam, quam dicemus $= A$, atque tempus elapſum ſit $= T$, erit

$$T = \frac{A}{m\surd 2AF}$$

At vero eaedem haec area in orbita proiecta minor eſt in ratione $1 : \cos\eta$, quare erit $= A.\cos\eta. = D$. Cumque ſit

$$T = \frac{A}{m\surd 2AF} = \frac{A.\cos\eta}{m\surd(2af).\cos\lambda^{3.2}}$$

erit

$$T = \frac{D}{m.\cos\lambda^{3:2}.\surd(2af)}$$

Ut adeo tempus detur per aream in ecclipticam proiectam D, per ſemilatus rectum orbitae proiectae 2af, & coſinum latitudinis heliocentricae culminis Q.

PROBLEMA XXXVI.

§. 162. *Data orbita proiecta aqn, inuenire orbitam veram NQn, eiuſque inclinationem & lineam nodorum Nn.*

SOLV-

SOLVTIO.

Sit orbita proiecta aNqn, eius axis af, focus f, centrum ſolis F. Quod cum ſit focus orbitae verae, agatur recta fFq per utrumque focum, atque ducta tangente tq, ipſique parallela NFn per centrum ſolis F, haec erit linea nodorum. Porro ad hanc demittatur normalis QqP, fiatque $FQ = \frac{1}{4} Nn$, punctum Q erit culmen orbitae verae, & qP:QP erit coſinus inclinationis. Denique fiat QG=QF, vel NG=Gn, ducatur QG ipſique parallela AF, haec erit axis orbitae verae. Cumque ſit $AF = PQ^2 : FQ$ (§. 161.) hinc dabitur diſtantia verticis vel perihelii A a centro ſolis F.

THEOREMA XI.

§. 163. *Orbita proiecta datur per meras longitudines geocentricas cometae, at quinque obſeruationes ad eam definiendam requiruntur.*

DEMONSTRATIO.

Determinatur orbita proiecta, ſi detur vertex a, & focus f, ſiue ſitus utriusque huius puncti ratione rectae e dato loco telluris in centrum ſolis ductae. Pendet itaque iſte ſitus a quatuor incognitis hunc in finem aſſumendis. His vero aſſumtis dabitur (§. 162.) linea nodorum nN, diſtantia af, & utraque recta FQ, Fq, atque proinde Fq:FQ=coſλ (§. 161.) Quoniam itaque quatuor iſtae incognitae aſſumtae determinandae ſunt per longitudines cometae geocentricas & ſpatia in orbita proiecta percurſa,

curſa, dabuntur haec ſpatia, quae cum temporibus elapſis comparari poterunt (§. 161.) & quoduis ſpatium ad aequationem deducit. Quoniam vero opus eſt quatuor aequationibus, opus quoque erit quatuor ſpatiis proiectis, adeoque quinque longitudinibus geocentricis obſeruatis.

THEOREMA XII.

§. 164. *Si cometa tempore cuiusdam obſeruationis verſetur in polo eccliptices, additis inſuper tribus longitudinibus geocentricis, orbita proiecta determinabitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi locus cometae in polo eccliptices in eam proiiciatur, cadet in locum, in quo eodem tempore verſatur tellus. Qualiscunque ergo ſit orbitae proiectae ſitus & magnitudo, oportet per hunc telluris locum tranſeat; adeoque datur definitum quoddam iſtius orbitae punctum. Hoc vero fit, ut ex quatuor incognitis aſſumendis altera euadat ſuperflua, quo ipſo minuetur numerus ſpatiorum, adeoque & longitudinum obſeruatarum.

SCHOLION I.

§. 165. Per ſe patet, ſi cometa in polo eccliptices fuerit ſtationarius, orbitam proiectam definitum iri, duabus his obſeruationibus tertiam adiiciendo. Ceterum calculus, quo definienda eſt orbita, mirum in modum eſt com-

 plexus

plexus, ut adeo utique praeſtet latitudines geocentricas una cum longitudinibus ad definiendam orbitam veram adhibere.

SCHOLION II.

§. 166. Quae hactenus de orbita cometae in planum eccliptices proiecta diximus, uniuerſaliora ſunt, quippe proiectio in planum eccliptícae mere eſt arbitraria, atque eligi poteſt planum quodlibet, cuius ſitus ratione ecclipticae ſit datus. Eiusmodi vero planum eccliptices vicem ſuſtinet, atque in iſtud ſimul proiicienda ſunt loca telluris, & rectae ex his in loca cometae ductae, uti iam exemplo rem illuſtratam dedimus in Problemate XXXI. (§. 155.) Plura dantur huiuſcemodi plana, quae ad compendium calculi quicquam facere poſſunt. Sic v. gr. planum quod tranſit per centra ſolis telluris & cometae idem nobis ſiſtit compendium, quod ſiſteret ecclíptica, ſi cometae verſaretur in alterutro nodorum. Similiter planum, quod ad rectam e centro telluris in centrum cometae ductam normale eſt, caſum nobis ſuppeditat caſui Theorematis XII. (§. 164.) analogum.

THEOREMA XIII.

§. 167. *Si cometa ita ſit ſtationarius, ut quater in eodem caeli puncto haerere videatur, ipſius orbita abſque ullo computo conſtruetur.*

DEMONSTRATIO.

Cum enim ſit ſtationarius, rectae e locis telluris in loca cometae ductae erunt parallelae. Concipiatur itaque planum per centrum ſolis tranſiens atque ad rectas iſtas normale, in hoc plano dabuntur quatuor puncta orbitae in iſtud proiiciendae. Haec vero cum ſit parabolica, patet eam conſtrui poſſe. Unde per Problema XXXVI. (§. 162.) dabitur ſitus orbitae verae.

SCHOLION.

§. 168. Vix equidem unquam cometa quater in eodem caeli puncto haerere obſeruabitur, ſi temporum interualla fuerint notabiliora. At ſi breuiora fuerint, exactiſſimis obſeruationibus opus erit, ſiquidem hac ratione orbitam veram eruere volueris. Dari tamen poterit, quae a vera parum aberrat, ſi motus cometae adparens fuerit lentiſſimus.

THEOREMA XIV.

§. 169. *Si cometa bis obſeruetur in eodem caeli puncto, rectae, quae aguntur per utrumque locum telluris, & per utrumque locum cometae in linea nodorum coincidunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint loca telluris T, t, cometae C, c. Ex his Fig. 19. in planum demittantur normales CK, ck, & CN, cn normales ad lineam nodorum Nn. Porro agantur rectae NK, nk, TK, tk, CcM,

G 2 TtM.

TtM. Quoniam cometa eſt ſtationarius, rectae TC, tc itemque rectae TK, tk ſunt parallelae, & inſuper anguli latitudinum CTK, ctk aequales. Unde erit

$CK:ck = CT:ct = KT:kt = CM:cM = TM:tM = KM:kM$

Quare rectae Tt, Cc, Kk in M coincidunt. Porro eſt

$CK:ck = CN:cn = KN:kn = CM:cM = KM:kM = NM:nM$

quare recta Nn in idem punctum M incidit, in quod incidunt rectae Cc, Kk, Tt. Eſt vero Nn linea nodorum, unde conſtat propoſitum.

THEOREMA XV.

§. 170. *Si cometa incedat in plano eccliptices, eiuſque orbita ſit parabolica, tres obſeruationes ſiue longitudines geocentricae ſufficiunt ad eam determinandam; contra ea quarta inſuper opus eſt, ſi incedat in ellipſi niſi detur huius axis maior.*

DEMONSTRATIO.

Tres longitudines determinandae orbitae parabolicae ſufficere, patet ex problemate XXXI. (§. 158.) ipſaque orbitae conſtructio longe eſt facilior. Contra ea cum tres iſtae longitudines pro determinanda parabola neceſſario requirantur, in ellipſi vero accedat ratio inter diſtantiam periheliam & ſemilatus rectum, haec indeterminata maneret, niſi vel accederet obſeruatio quarta, vel data eſſet longitudo axeos maioris, ſiue quod idem eſt, tempus periodicum.

SCHO-

SCHOLION.

§. 171. Eadem ratione ſi orbita fuerit ad ecclipticam inclinata ſed parabolica, tres equidem obſeruationes requiruntur, at non complete. Carere enim poſſumus vel tempore quo fit altera obſeruatio, vel longitudine vel latitudine geocentrica. At ſi nilominus ſingulae tres obſeruationes complete adhibeantur, plura data adſunt quam opus eſt, unde ad compendium calculi adhiberi poterunt ſuperfluae, ſaltem ad eius correctionem.

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO IV.

Demonſtrantur proprietates concinniores orbitae Cometarum, ſimulque & Planetarum ellipticae.

LEMMA XXIII. THEOREMA.

Fig. 10. §. 172. *Si in ellipſi ſumantur tres ordinatae aequidiſtantes* PN, QL, RM, *atque e foco F ducantur radii vectores* FN, FL, FM, *erit* $2FL = FN+FM$.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipſeos eſt

$$FN = AF + \left(\frac{AB-2AF}{AB}\right).AP$$

$$FM = AF + \left(\frac{AB-2AF}{AB}\right).AR$$

adeoque

$$FN+FM = 2AF + \left(\frac{AB-2AF}{AB}\right).(AP+AR)$$

Eſt

Eſt vero per hypotheſin

$$(AP+AR)=2AQ$$

adeoque

$$FN+FM=2\left[AF+\left(\frac{AB-2AF}{AB}\right).AQ\right]=2FL.$$

LEMMA XXIV. THEOREMA.

§. 173. *Si in ellipſi AQBD ſumatur punctum quoduis Q, atque ducatur diameter QCD, tangens QT, ipſique parallela quaelibet NGM, nectantur focus F & punctum aſſumtum Q recta QFb, atque ordinata NM orthogonaliter transferatur in nEm, ut ſit nE=mE, puncta n, m itidem erunt in ellipſi Qnbm, cuius focus pariter eſt F, & axis maior Qb, axi maiori AB ellipſeos prioris aequalis.* Fig. 21.

DEMONSTRATIO.

Cum QCD ſit diameter ellipſeos, atque ordinata NM tangenti QT parallela, per notiſſimam ſectionum conicarum proprietatem, aequatio inter abſciſſam QG & ordinatam NM prorſus analoga eſt illi, quae exprimit relationem inter abſciſſas in axe maiore ſumtas & adplicatas ad axin normales. Quoniam porro per conſtructionem eſt NM=nm, & QG ∽ QE, atque NM ad FQ normalis, aequatio inter QE & nm itidem erit ad ellipſin, cuius axis maior eſt Qb. Ducta porro Cc ipſi QT parallela, atque erecta cγ ad axin Qb normali =cC, erit cγ ſemiaxis minor. Dicatur iam

$$AB=a$$
$$AF=f$$
$$FQ=z$$

Ducta recta Qf in alterum focum f, angulus TQF per naturam ellipſium erit $= 90° - \frac{1}{2}FQf$, eritque

$$FQ + Qf = a$$
$$Qf = a - z$$
$$Ff = a - 2f$$

hinc per formulas trigonometricas

$$\text{coſin}\tfrac{1}{2}FQf = \text{ſin}\,TQF = \text{ſin}\,QcC = \frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$\text{coſ}\,TQF = \text{coſ}\,QcC = \frac{\sqrt{[az-zz-(af-ff)]}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$\text{coſ}\,QFC = \frac{az-(2af-ff)}{z(a-2f)}$$

$$\text{ſin}\,QFC = \frac{2\sqrt{(af-ff)}}{z(a-2f)} \cdot \sqrt{[az-zz-(af-ff)]}$$

Unde ob $QTC = QFC - TQF = FCc$, erit

$$\text{ſin}\,FCc = \frac{(a-2z)\sqrt{(af-ff)}}{(a-2f)\sqrt{(az-zz)}}$$

Eſt vero

$$Fc : \text{ſin}\,FCc = FC : \text{ſin}\,QcC$$

adeoque ſubſtitutis valoribus repertis debitaque reductione facta

$$FC = \tfrac{1}{2}a - z$$
$$Fc + z = Qc = \tfrac{1}{2}a$$
$$Qb = a = AB.$$

Eſt porro ſemidiater coniugata $Cc = c\gamma = \sqrt{(az-zz)}$, adeoque cum ſit

$$F\gamma^2 = Fc^2 + c\gamma^2$$

erit

$$F\gamma^2 = (\tfrac{1}{2}a - z)^2 + (az - zz) = \tfrac{1}{4}a^2$$
$$F\gamma = \tfrac{1}{2}a = Qc$$

Unde patet F eſſe focum utriuſque ellipſeos.

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 174. Similiter erit ſemidiameter

$$QC = \sqrt{[\tfrac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]} = \sqrt{(Fc^2 + CH^2)}$$

Hinc porro

$$\text{ſin}\, QCc = \frac{a\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)} \,.\, \sqrt{[\tfrac{1}{4}(a-z)^2 + af - ff]}}$$

COROLLARIVM II.

§. 175. Cum ſit per naturam ellipſeos

$$GM^2 = \frac{QG.GD.Cc^2}{QC^2}$$

atque

$$\frac{QG\,.\,GD}{QC^2} = \frac{QE\,.\,Eb}{Qc^2}$$

erit

$$GM^2 = Em^2 = \frac{QE\,.\,Eb\,.\,Cc^2}{Qc^2}$$

COROLLARIVM III.

§. 176. Dicta itaque $FE = \xi$, erit

$$Em^2 = \frac{(az - a\xi \quad (z-\xi)^2).(az-zz)}{\tfrac{1}{4}a^2}$$

$$Fm = \frac{2(az-zz)}{a} - \frac{(a-2z)\xi}{a}$$

LEMMA XXV. THEOREMA.

§. 177. *Sint omnia ut in lemmate praecedente, ductis radiis vectoribus Fn, Fm, FN, FM, ſumma priorum Fn + Fm erit aequalis ſummae poſteriorum.*

DEMONSTRATIO.

Per punctum G ducatur adplicata PGK, atque e foco F recta FK. Quoniam $NG = GM$, erit per Lemma XXIII. (§. 172.) $2FK = FN + FM$. Cumque ſit $Fn = Fm$, demonſtrandum eſt, eſſe $Fn = FK$.

Quoniam TQ, EG, cC ſunt parallelae, erit

$$cQ : QC = cE : GC$$

$$CG = \frac{QC \cdot cE}{cQ}$$

ſiue ſubſtitutis valoribus

$$CG = \frac{(\xi + \frac{1}{2}a - z)\sqrt{[\frac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]}}{\frac{1}{2}a}$$

Porro per trigonometriam eſt

$$\text{coſ}QCF = \frac{QC^2 + CF^2 - QF^2}{2QC \cdot CF}$$

$$CP = CG \cdot \text{coſ}QCF$$

unde valoribus ſubſtitutis, erit

$$\text{coſ}QCF = \frac{\frac{1}{2}a(a-2z}{(a-2f)\sqrt{[\frac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]}}$$

$$CP = \frac{(a-2z) \cdot (2\xi + a - 2z)}{2(a-2f)}$$

Hinc

$$PF = FC - CP = \frac{(a-2f)^2 - (a-2z)^2 - 2(a-2z)\xi}{2(a-2f)}$$

Eſt vero per naturam ellipſeos

$$FK = \frac{2(af-ff)}{a} + \frac{a-2f}{a} \cdot FP$$

adeo-

adeoque ſubſtitutione debitaque reductione facta

$$FK = \frac{2(az-zz)}{a} - \frac{(a-2z)\xi}{a}$$

Eundem vero valorem habuimus pro radio Fm (§. 176.) erit itaque

$$FK = Fm$$

$$2FK = 2Fm = Fn + Fm = FN + FM.$$

LEMMA XXVI. THEOREMA.

§. 178. *Sint omnia ut in utroque Lemmate praecedente, areae ſectorum NQMF, nQmF erunt in ratione ſubduplicata ſemilaterum rectorum ellipſium AB, Qb.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi ordinatae NM ad diametrum QD eſſent normales, area ſegmenti NMQ maior foret in ratione reciproca ſinus inclinationis QGN. Unde cum in nm translatae ad axin Qb ſint normales, ſegmentum nQm utique in hac ratione maius eſſe debet. At vero cum abſciſſae QE maiores ſint abſciſſis QG, ſegmentum nmQ in hac quoque ratione maius eſt; Ut adeo ſit

$$nmQ = \frac{NMQ \cdot QE}{\text{ſin}\, QEG \cdot QG}$$

Eſt vero per trigonometriam

$$\frac{QE}{QG \cdot \text{ſin}\, QEG} = \frac{1}{\text{ſin}\, QEG} = \frac{1}{\text{ſin}\, TQF}$$

adeo.

adeoque ſegmentum

$$nmQ = \frac{NMQ}{\text{ſin}\,TQF}$$

Eſt vero (§. 173.)

$$\text{ſin}\,TQF = \frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

Quare

$$nmQ = \frac{NMQ \,.\, \sqrt{(az-zz)}}{\sqrt{(af-ff)}}$$

$$nmQ : NMQ = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Porro cum triangula nFm, NFM habeant baſes nm, NM aequales, eorum areae erunt ut perpendicula e foco ſiue vertice communi F in eas demiſſa adeoque ut ſinus totus ad ſinum anguli NEF = TQF. Unde ſimiliter erit

$$nFm : NFM = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Quare & toti ſectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Sunt vero ſemilatera recta ellipſium

$$AHB = \frac{2(af-ff)}{a} = s$$

$$Q\gamma b = \frac{2(az-zz)}{a} = S$$

adeoque ſectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{\frac{aS}{2}} : \sqrt{\frac{as}{2}} = \sqrt{S} : \sqrt{s}$$

Conſtat ergo propoſitum.

COROL-

COROLLARIVM.

§. 179. Erit itaque

$$\frac{nQmF}{\sqrt{S}} = \frac{NQMF}{\sqrt{s}}$$

LEMMA XXVII. THEOREMA.

§. 180. *Axi maiori ellipſeos AB inſiſtat ſemicirculus AnmB, ſumta chorda quacunque NM eaque in G biſecta, e centro C agatur recta CGQ, e puncto Q recta Qc per focum F, denique recta Cc chordae NM vel tangenti TQ parallela. Porro per puncta N, Q, M ducantur nN, qQ, mM ad axin AB normales, nectantur n, m, q, C rectis mn, qC, dico, arcum nm eſſe in q biſectum, atque ſagittam qg=QE.* Fig. 22.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipſeos ordinatae Pm, PM ſunt in ratione axeos maioris ad minorem, quare chordae mn, MN productae in R cum axe maiori coincident, unde porro erit ng=gm, cum ſit NG=GM. Hinc porro

$$CQ : QG = Cq : qg$$

Sed ob parallelas NM, cC erit

$$CQ : QG = Qc : QE$$

adeoque

$$Cq : qg = Qc : QE$$

Eſt vero (§. 173.)

$$cq = AC = Qc$$

Quare &

$$qg = QE$$

COROL-

COROLLARIVM.

§. 181. Cum Qc ſit ſemiaxis maior alterius ellipſeos Qb (Fig. 21.) atque ſemiaxi maiori AC aequalis, patet (Fig. 22.) ſagittam QE ſimiliter eſſe ſinum verſum arcus circularis arcui nq aequalis. Unde non modo chordae ellipticae nm, NM (Fig. 21.) verum & chordae arcuum circularium, ad quos referuntur aequales ſunt.

SCHOLION.

Fig. 22. §. 182. Quod ut clarius explicetur, ponamus ellipſin ANMB eſſe proiectionem orthographicam circuli AnmB, obliquius ad eam inclinati, ita ut axis AB ſit linea interſectionis ſiue linea nodorum, & PM : Pm coſinus inclinationis. Quo poſito chorda NM erit proiectio chordae circularis nm, ſimiliterque (Fig. 21.) chorda elliptica nEm erit proiectio chordae circuli, cuius diameter & linea interſectionis eſt axis maior Qb, & coſinus inclinationis $= c\gamma : Qc$. At per Corollarium praeſentis Lemmatis non modo chordae circulares aequales ſunt, verum & ellipticae, quae ſunt illarum proiectio.

THEOREMA XV.

Fig. 21. §. 183. *Sint omnia ut in Lemmate vigeſimo quarto* (§. 173.) *utraque ellipſis Qmb, AQB poterit eſſe orbita cometae, atque utraque eodem tempore percurritur.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim F eſt focus utrique communis, unde per legem tertiam (§. 68.) erit centrum ſolis, quod neceſſario focus eſſe debet ſectionis conicae, quam cometa percurrit. Quoniam porro vi Lemmatis citati uterque axis maior AB, Qb eſt aequalis, tempus periodicum quoque idem ſit oportet (§. 71.)

THEOREMA XVI.

§. 184. *Iiſdem poſitis, arcus nQm, NQM eadem tempore percurruntur.*

DEMONSTRATIO.

Per legem quartam (§. 69.) tempora ſunt ut areae, quas verrit radius vector per radicem quadratam ſemilaterum rectorum diuiſae, adeoque (§. 178.) tempus quo percurritur arcus NM erit ad tempus, quo percurritur nQm, ut (NQMF : $\sqrt{s}$) ad (nQmF : $\sqrt{S}$) Sed eſt (§. 179.)

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} = \frac{nQmF}{\sqrt{S}}$$

adeoque & tempora aequalia ſint neceſſe eſt.

PROBLEMA XXXVII.

§. 185. *Si cometa in orbita elliptica percurrat arcum quemlibet NQM, inuenire infinitas alias ellipſes, in quibus eodem tempore percurriſſet arcus, quos ſubtendant chordae ipſi NM aequales, & ſumma radiorum vectorum extremorum ſummae extremorum FN + FM aequalis fuiſſet.*

SOLV-

SOLVTIO.

Biſecta chorda NM in G, e centro C agatur recta CQG. atque quaelibet ellipſis datae ANMB iſochrona ſiue aeque periodica voto ſatisfaciet, ſi ita ponatur, ut tranſeat per punctum Q, & focus cum foco F ellipſeos datae coincidat.

Aliter.

Fig. 22. Spectetur ellipſis AQB ut proiectio orthographica circuli AqB, atque chorda NM erit proiectio chordae nm. Arcus nm in circulo AqB transferatur ad lubitum, atque mutata inclinatione quaeratur chorda proiecta datae NM aequalis. Quo facto dabuntur duo puncta ellipſeos conſtruendae, atque inſuper uterque vertex A, B. Ea itaque conſtructa, ita erit ponenda ut focus cum foco F coincidat.

SCHOLION.

§. 186. Ponamus breuitatis ergo nm eſſe ipſam chordam translatam, demittantur nN, mP ad axin normales, & chorda mn producatur in R, ubi axin decuſſat. Fiat ut chorda mn ad mR, ita chorda ellipſeos datae ad quartam proportionalem. Haec ponatur ex R in M, eruntque N, M duo illa puncta quaeſita ellipſeos ANMB, & arcus NM voto ſatisfaciet.

DEFINITIO IV.

§. 187. *Lapſus ellipticus cometae in ſolem eſt eiusdem in ellipſi inceſſus, cuius axis minor vel ſemi-*

latus

latus rectum $=0$, *ſiue cuius vertex cum foco in centro ſolis coincidit.*

COROLLARIVM I.

§. 188. Quoniam axis maior ellipſeos eſt finitus, lapſus elliptici datur initium, atque cometa hac ratione in ſolem delabens, a quiete inchoat, totumque axin maiorem emetitur.

COROLLARIVM II.

§. 189. Quoniam porro tempus periodicum cometae in ellipſi incedentis unice pendet a longitudine axeos maioris (§. 71.) patet, hoc dato, una dari tempus, quo cometa a quiete inchoans in ſolem delabitur.

PROBLEMA XXXVIII.

§. 190. *Data diſtantia cometae vel corporis quieſcentis a ſole inuenire tempus, quo in ſolem delabitur.*

SOLVTIO.

Sit diſtantia iſta $=D$, erit haec longitudo axeos maioris ellipſeos, cuius tempus periodicum duplo maius eſt tempore quaeſito. Unde cum tempus periodicum ſit (§. 71.)

$$=\frac{\pi}{m}\cdot(\tfrac{1}{2}D)^{3:2}$$

erit tempus lapſus elliptici in ſolem

$$t=\frac{\pi}{m}\cdot D^{3:2}:4\sqrt{2}$$

 COROL-

COROLLARIVM.

§. 191. Quoniam tempus lapſus parabolici eſt (§. 103.)

$$= D^{3:2} : 3m\sqrt{2}$$

erit tempus parabolicum ad ellipticum ut 4 ad 3π ſiue proxime $= 14 : 33 = 73 : 172$.

SCHOLION.

§. 192. Si pro *D* ſucceſſiue ſubſtituantur diſtantiae planetarum mediae, erit tempus lapſus elliptici in ſolem

♄	dierum	1902,60.
♃	- -	764,38.
♂	- - -	121,42.
♁	- -	64,57.
♀	- - -	39,70.
☿	- -	15,55.

PROBLEMA XXXIX.

§. 193. *Inuenire celeritatem cometae in ellipſi incedentis.*

SOLVTIO.

Fig. 12. Sit AM arcus ellipticus, A vertex, AF eius diſtantia a foco vel centro ſolis $= f$, axis maior ſit α, diſtantia FM$= z$, arcus MN infinite paruus, MP arcus circularis ſoli concentricus. Tempus quo percurritur MN ſit $= T$, quo vero percurritur MP$= t$, erit ſemilatus rectum ellip-

ellipſeos $=2(af-ff):a$, adeoque vi legis quartae (§. 69.)

$$T=\frac{MFN.\sqrt{a}}{m\sqrt{(2af-2ff)}}.$$

$$t=\frac{MFP}{m\sqrt{z}}$$

Dicantur celeritates per MN$=C$, per MP$=c$, erit

$$C=MN:T$$
$$c=MP:t$$

adeoque

$$C:c=\frac{m.MN.\sqrt{2(af-ff)}}{MFN\sqrt{a}}:\frac{MP.m\sqrt{z}}{MFP}$$

ſiue

$$C:c=MN\sqrt{2(af-ff)}:(MP.\sqrt{za})$$

Eſt vero

$$\frac{MP}{MN}=\text{ſin}\,MNP=\frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}\ (\text{§. } 173.)$$

Quare ſubſtitutione facta

$$C:c=\sqrt{2(az-zz)}:\sqrt{za}$$

Eſt vero (§. 75.) celeritas circularis

$$c=2m:\sqrt{z}$$

adeoque

$$C=\frac{2m\sqrt{2(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

Quod eſt ſpatium iuxta directionem tangentialem uno die naturali percurrendum.

COROLLARIVM.

§. 194. Cum formulam erutam nonniſi axis maior & diſtantia FM ingrediatur, patet celeri-

leritatem a ſitu foci in axe eſſe independentem.

THEOREMA XVI.

§. 195. *Si tempora periodica duorum pluriumue cometarum in ellipſibus incidentium ſint aequalia, celeritas ſingulorum ad eandem a ſole diſtantiam eſt eadem.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ſi tempora periodica ſint aequalia, axes maiores quoque ſunt aequales (§. 71.) Unde cum in genere celeritas elliptica ſit:

$$C = \frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

erit axis maior a pro ſingulis idem. Cumque ex hypotheſi & diſtantia z ponatur eadem, patet celeritatem quoque eandem eſſe.

THEOREMA XVII.

Fig. 23. §. 196. *Si cometa in ellipſi incedens percurrat arcum quemlibet NM, ducta chorda NM eaque biſecta in G, e centro C agatur ſemidiameter CGQ, atque e foco F recta FB axi maiori AB aequalis: Facta porro* $Fg = \frac{1}{2}(FN + FM)$ *&* $Gn = gm = GN$, *dico, ſi cometa e puncto b a quiete incboans labatur in ſolem, tempus quo emetitur partem abſciſſam mn eſſe aequale tempori, quo percurritur arcus NM.*

DEMONSTRATIO.

Recta Fb ſpectari poterit ceu ellipſis, cuius focus cum vertice in F coincidit, atque ob

Fb = AB tempus quo percurritur idem eſt ac tempus periodicum ellipſeos AQB (§. 71.). Erit porro Fn + Fm ſumma radiorum vectorum = FN + FM, & nm chorda percurſa = NM, quare vi Problematis XXXVII. (§. 185.) utraque chorda eodem tempore percurritur.

COROLLARIVM.

§. 157. Tempus itaque, quo percurritur arcus ellipticus quicunque per lapſum cometae ellipticum in ſolem definiri poterit.

DEFINITIO V.

§. 198. *Scala celeritatum ellipticarum eſt recta ita diuiſa, ut ad datam quamuis a ſole diſtantiam celeritatem cometae in ellipſi incedentis exhibeat.*

COROLLARIVM.

§. 199. Cum celeritas elliptica pendeat ab axe maiori (§. 194.) conſequens eſt, ſcalam hanc eandem manere, quoties axis maior retineatur idem, hoc vero mutato ſcalam quoque mutatum iri.

THEOREMA XVIII.

§. 200. *Si F denotet centrum ſolis, in quod cometa a quiete incboans ex A delabatur, atque dato cuiuis puncto M adſcribatur tempus, quo vel ex A peruenit in M, vel etiam ex M in F, recta AF hac ratione diuiſa erit ſcala celeritatum pro ellipſibus, quarum axis maior eſt = AF.* Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Datur enim tempuſculum, quo percurritur ſpatiolum quodlibet Mm. Hoc vero per illud diuiſum celeritatem in M exhibet. Cum vero quilibet axis maior aliam requirat celeritatum ſcalam (§. 199.) atque recta AF referat ellipſin cuius vertex & focus eſt F, axis maior $=$ AF (§. 197.) conſequens eſt ſcalam his tantum ellipſibus inſeruire, quarum axis maior eſt $=$ AF.

THEOREMA XIX.

§. 201. *Sit A centrum ſolis, cometa a quiete incboans ex B labatur in A, diametro AB deſcribatur ſemicirculus, aſſumta abſciſſa qualibet AP, normaliter ducatur ordinata PM, atque porro AM, dico, tempus lapſus integri per BA eſſe ad tempus lapſus per BP, ut area ſemicirculi AMB ad aream ſegmenti AMB.*

DEMONSTRATIO.

Etenim recta AB refert ellipſin omni latitudine carentem, unde ſpatia, quae verrit radius vector, quibusque tempora ſunt aequalia per notiſſimum Aſtronomiae theorema commodius & vel neceſſario per ſpatia ſemicirculi axi maiori AB inſiſtentis exhibentur. Eſt vero focus in A, unde recta AM radii vectoris vicem ſuſtinet, & tempora erunt ut areae, quas verrit. Quare tempus lapſus integri erit ad tempus lapſus per BP, ut area ſemicirculi ad aream ſectoris MAB.

Aliter.

Sit AB$=a$, AP$=z$, Pp$=-dz$, tempuſculum, quo labendo percurritur Pp ſit $=d\tau$, erit celeritas in P $=dz:d\tau$. Vidimus vero, hanc eſſe (§. 193.)

$$=\frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

Quare erit

$$-\frac{dz}{d\tau}=\frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

unde

$$-\frac{2\sqrt{2}.md\tau}{\sqrt{a}}=\frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}.m}{\sqrt{a}}.\tau=\int\frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}}$$

Eſt vero $\frac{1}{4}azdz:\sqrt{(az-zz)}=$ ſpatiolo mAM, unde erit $\frac{1}{2}\tau.m.\sqrt{2a}=$MAB

$$\tau=\frac{2\text{MAB}}{m\sqrt{(2a)}}=\frac{2n.\text{MAB}}{\sqrt{2a}}$$

SCHOLION I.

§. 202. Haec formula exhibet tempus in diebus naturalibus, atque eatenus pendet a definita longitudine axeos maioris AB. Quodſi vero in genere tempus peridiocum ellipſeos diuidatur in 100 partes aequales, atque axis maior AB in partes 10000, computabitur tabella lapſuum ellipticorum, qualis eſt ea, quam ad calcem huius opuſculi adiecimus, ipſius uſus erit uniuerſalior. Eadem quoque vi theorema-

rematis XVIII. (§. 200.) uſui erit in conſtruendis *ſcalis celeritatum ellipticarum*, qualem ſiſtit
Fig. 25. Fig. 25. Numeri adſcripti ſunt tempora, quibus cometa lapſu elliptico a dato quouis loco in ſolem A defertur, ſi lapſus in B initium ſumat, totumque tempus in 50 partes aequales diuidatur.

SCHOLION II.

Fig. 23. §. 203. Quodſi recta FB = AB (§. 196.) hac ratione diuidatur, differentia temporum punctis n, m adſcriptorum erit tempus, quo percurritur pars nm adeoque & arcus NM. Uſus enim ſcalae ellipticae idem eſt ac parabolicae, quem in ſuperioribus fuſius explicauimus. Simulac enim datus ſit axis maior, dabitur ſcala celeritatum, & chorda arcus cuiuscunque percurſi una cum ſumma radiorum extremorum FN + FM determinando tempori ſufficiunt.

LEMMA XXV. PROBLEMA XL.

Fig. 21. §. 204. *Data longitudine axis maioris & ſitu foci F nec non ſitu punctorum N, M, conſtruere ellipſin.*

SOLVTIO.

Uterque radius vector FM, FN ab axe maiori ſubtrahatur, atque differentiae vel reſidua per naturam ellipſeos erunt diſtantiae foci alterius f ab utroque puncto M, N. Cum vero haec puncta ſint poſitione data, ſitus foci f abſque difficultate determinabitur. Quo facto recta Ff

in

in C bifariam ſecetur, atque ſemilongitudo axis maioris ponetur ex C in A & B, eritque AB ſitus & longitudo axeos maioris. Hoc vero dato conſtructio ellipſeos facillime abſoluetur.

SCHOLION.

§. 205. Vel me tacente patet, ſitum foci alterius f duplicem eſſe, quare aliunde conſtare debet, quinam ſit eligendus.

THEOREMA XX.

§. 206. *Si cometa, cuius tempus periodicum notum ſit, e tellure obſeruetur in utroque nodo, dabitur ſitus & longitudo lineae nodorum, & ſitus axeos maioris, totaque orbita, ſed indefinita remanet huius inclinatio.*

DEMONSTRATIO.

Sit NAn pars ellipſeos, F focus vel centrum ſolis, eE orbita telluris ſimulque eius loca tempore utriuſque obſeruationis. Rectae en, EN ſint longitudines cometae geocentricae obſeruatae, adeoque poſitione datae, erit NFn linea nodorum. Quoniam datur tempus periodicum datur quoque longitudo axeos maioris, unde conſtruetur ſcala celeritatum. In hac a centro ſolis numeretur tempus a prima obſeruatione ad alteram praeterlapſum, atque capiatur diſtantia, haec erit longitudo lineae nodorum Nn, quae cum neceſſario tranſeat per F, atque cadat intra rectas NE, ne poſitionedatas, hac ratione duci poterit. Datur ergo ſitus utriuſque puncti N, n & foci F,

quare conſtructio orbitae abſoluetur per Lemma praecedens (§. 204.) Cum vero puncta n, N ſint in plano eccliptices, orbitae inclinato his ſolis datis definiri nequit.

SCHOLION.

§. 207. Probe vero notandum, octuplicem eſſe huius caſus ſolutionem. Primo enim recta Nn quadruplici modo intra rectas NE, ne cadere poteſt, ita ut per F tranſeat. Porro quilibet rectae Nn ſitus duplicem iterum admittit ſitum orbitae. (§. 205.) unde prodit ſolutio octuplex. At vero haud difficulter ad duplicem reuocatur. Etenim recta Nn etſi quadruplici modo conſtrui poſſit, attamen duobus tantum caſibus ipſa tranſit per F, quod eſſe debet, quia centrum ſolis neceſſario eſt intra utrumque nodum N, n. Ceteris vero duobus caſibus F cadit extra nodos N, n, unde vel neceſſario excluduntur. Porro duplex orbitae ſitus (§. 205.) hic nullam faceſſit difficultatem, quippe, tertia obſeruatione in ſubſidium vocata, una cum angulo inclinationis verus orbitae ſitus determinatur.

THEOREMA XXI.

§. 208. *Si notum ſit tempus periodicum cometae in ellipſi incedentis, atque inſuper dentur tria ipſius loca geocentrica una cum interuallo temporis, quo factae ſunt obſeruationes, tota orbita eiuſque ſitus definietur.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim dato tempore periodico datur axis maior adeoque & ſcala celeritatum (§. 71. 200. ſeqq.) Huius vero uſus cum plane idem ſit ac ſcalae celeritatum parabolicarum, conſtructio orbitae eodem modo abſoluetur, quo in ſolutione ſecunda Problematis XXXI. (§. 155.) orbitam parabolicam conſtruendam eſſe docuimus. Definietur nempe ſitus verus duorum locorum cometae, unde tertia obſeruatione adhibita, tota orbita conſtruetur per Lemma XXV. (§. 204.)

SCHOLION.

§. 209. Tempus periodicum cometae, quod in hoc theoremate ceu datum aſſumitur, utique abeſſe poſſe non me fugit, quippe tria loca cometae geocentrica ſufficiunt. Ne itaque absque ulla ratione vel neceſſitate datorum vel requiſitorum numerum auxiſſe videar, haec notare conueniet. Primo conſtat eam eſſe orbitarum cometarum indolem eumque ſitum, ut arcus ille, quem tempore viſibilitatis percurrunt totius ellipſeos pars ſit admodum exigua. Unde ex ſex illis capitibus, quae ſimul ſumta ſunt orbitae veluti notae characteriſticae (§. 141. 142.) longitudo axeos maioris ex obſeruationibus ſibi tantopere vicinis tuto colligi nequit, cum vel minimus error in obſeruationibus vix euitandus differentiam notabilem pariat. Huc quoque referas *aberrationem luminis*, quae obſeruationes plus minuſue incertas reddere valet, cuiuſque effectus, niſi

iam

iam proxime nota ſit cometae orbita, definiri nequit. Quodſi vero orbita iam proxime ſit definita, accidet quandoque, ut ex ceteris notis characteriſticis cometa cognoſcatur eſſe idem, qui iam olim obſeruatus eſt, unde tempus periodicum colligi poterit, praeſertim ſi iam pluries fuerit obſeruatus. Dato vero tempore periodico, determinatio orbitae utique maxime facilitatur, quippe datur ſcala celeritum, vel ſi calculo rem curatius abſoluere conducat, computari poterit tabella lapſus elliptici. Denique dato tempore periodico, eadem hic notanda veniunt, quae circa parabolam notauimus (§. 170. 171.)

PROBLEMA XLI.

Fig. 23. §. 210. *Data longitudine axis maioris AB, ſumma radiorum vectorum FN + FM & chorda NM, inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM.*

SOLVTIO.

Sint omnia ut in theoremate XVII. (§. 196.) cometa ex b in F decidens eodem tempore percurrit partem abſciſſam mn, quo percurritur arcus NQM, atque eſt

$$Fm = \frac{FN + FM + NM}{2}$$

$$Fn = \frac{FN + FM - NM}{2}$$

Pona-

Ponatur

$$Fb = AB = a$$
$$Fm = z$$
$$Fn = \zeta$$

tempora, quibus percurruntur Fm, Fn ſint t, τ, differentia $t - \tau = T$ ſit tempus quaeſitum, erit (§. 201.)

$$\frac{2\sqrt{2}.m.t}{\sqrt{a}} = \int \frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}}.$$

$$\frac{2\sqrt{2}.m.\tau}{\sqrt{a}} = \int \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{(a\zeta-\zeta\zeta)}}$$

Quibus formulis in ſeriem reſolutis debiteque integratis, erit

$$2\sqrt{2}.mt = \frac{2}{3} z^{3:2} + \frac{1.2}{2.5.a}.z^{5:2} + \frac{1.3.2.z^{7:2}}{2.4.7.a^2}$$
$$+ \frac{1.3.5.2.z^{9:2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.$$

$$2\sqrt{2}.m\tau = \frac{2}{3} \zeta^{3:2} + \frac{1.2.\zeta^{5:2}}{2.5.a} + \frac{1.3.2.\zeta^{7:2}}{2.4.7.a^2}$$
$$+ \frac{1.3.5.2.\zeta^{9:2}}{2.4.6.9a^3} \mp \&c.$$

adeoque

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(z^{3:2} - \zeta^{3:2}) + \frac{n}{10.a\sqrt{2}}(z^{5:2} - \zeta^{5:2})$$
$$+ \frac{3.n}{56.a^2.\sqrt{2}}(z^{7:} - \zeta^{7:2}) + \frac{5.n}{144.a^3\sqrt{2}}(z^{9:2} - \zeta^{9:2})$$
$$+ \&c.$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 211. Si axis maior ſit infinitus, ellipſis abit in parabolam, atque erit breuiſſime

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(z^{3:2} - \zeta^{3:2})$$

prorſus ut in ſolutione tertia problematis XV. (§. 83.)

COROLLARIVM II.

§. 212. Patet itaque, quid tempori ex hypotheſi parabolae computato addendum ſit, quo habeatur tempus, quo cometa arcum NQM ellipticum percurrit. Primus enim ſeriei erutae terminus ab axe maiore ellipſeos non pendet, unde ſi ſolus retineatur, parabolae inſeruit

COROLLARIVM III.

§. 213. Similiter ſi FB ſit hyperbolae axis tranſuerſus, tempus lapſus hyderbolici cometae ex m in ſolem F, erit (§. 210.)

$$t = \frac{n}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}z^{3:2} - \frac{1.2.z^{5:2}}{2.5.a} + \frac{1.3.2.z^{7:2}}{2.4.7.a^2} - \frac{1.3.5.2.z^{9:2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.\right)$$

Unde facile conſtruetur *ſcala celeritatum hyperbolicarum*, ſcalae ellipticarum & parabolicarum ſimilis.

THEOREMA XXII.

§. 214. *Axi maiori ellipſeos AB inſiſtat ſemicirculus AqB, ducta chorda NM axi AB parallela, erigantur ordinatae PNn, RMm, dico, ſi pro ellipſi ſol ſit in foco F, pro circulo vero in centro C, arcus NQM, nqm eodem tempore percurſum iri.* Fig.26.

DEMONSTRATIO.

E centro C erigatur normalis CQq, haec utramque chordam NM, nm biſecat, ducta itaque FQ, erit QE = qg (§. 180.) & ellipſis iuxta praecepta Lemmatis XXIV. (§. 173.) per Q ducenda hoc caſu, ob FQ = AC, abit in circulum $\nu Q \mu$, circulo AqB aequalem. Ducta itaque $\nu E \mu$ ad FQ normali, arcus $\nu Q \mu$ eodem tempore percurritur, quo arcus NQM (§. 183.) At vero ob FQ = Cq, QE = qg, arcus nqm arcui $\nu Q \mu$, & chorda nm chordae $\nu \mu$ eſt aequalis. Unde ſi centrum ſolis pro circulo AqB ſtatuatur in C, arcus nqm eodem tempore percurritur, quo arcus ellipticus NQM.

COROLLARIVM I.

§. 215. Quodſi ergo detur tempus, quo cometa peruenit ex A in N, haud difficulter dabitur tempus, quo peruenit ex A in M, & viciſſim. Addendum enim vel demendum erit tempus, quo percurritur arcus circularis nm. Huius vero computus longe eſt facillimus. Erit enim tempus iſtud ad tempus cometae periodicum ut arcus nqm ad peripheriam circuli AqB integram.

COROL.

COROLLARIVM II.

Fig.21. §. 216. Similiter, cum hoc theorema a ſitu foci F non pendeat, ſi ponatur centrum ſolis in A, ut ſit AF=o, cometa motu elliptico ex B in A delabens eodem tempore percurrit partem abſciſſam RP, quo percurritur arcus circularis nqm. ut adeo iterum dato tempore, quo cadit ex B in R facillime reperiatur tempus quo cadit ex B in P, ſiue etiam dato tempore quo peruenit ex P in A, reperiatur tempus, quo decidit ex R in A.

THEOREMA XXIII.

§. 217. *Dato axe maiori AB, motus cometae per arcum quemlibet NM reduci poterit ad motum in alia ellipſi aeque periodica NQM, ita ut in hac eodem tempore percurrat arcus nQ, Qm ab utraque verticis parte aequales.*

DEMONSTRATIO.

Biſecta chorda NM in G, ſumtaque ſemiſumma radiorum vectorum (FN+FM):2, conſtruatur triangulum rectangulum FEm, ita ut ſi

$$Fm = \frac{FN+FM}{2}$$

$$Em = \tfrac{1}{2}NM$$

Quo facto ſumatur differentia inter Fm & axin AB, atque haec transferatur ex m in φ, eritque φ focus alter ellipſeos quaeſitae. Biſecta itaque φF in c, fiat cQ=cb=AC, eritque Qb axis maior. Dato vero foco F & axe maiori Qb ellipſis conſtrui poterit, eritque nQm arcus quaeſitus (§. 183.)

Tabu-

Tabula lapſus parabolici cometarum in ſolem.

Tempus d. h.	Diſtant. a centro ſolis	Tempus d. h.	Diſtant. a centro ſolis	Tempus d. h.	Diſtant. a centro ſolis
0; 0	0,00000	3; 3	0,23516	8,12	0,45822
0; 3	0,02750	3; 6	0,24139	8,18	0,46712
0; 6	0,04366	3; 9	0,24754	9, 0	0,47601
0; 9	0,05721	3;12	0,25360	9, 6	0,48479
0;12	00,6930	3;15	0,25961	9,12	0,49348
0;15	0,08042	3;18	0,26055	9,18	0,50211
0;18	0,09082	3;21	0,27142	10, 0	0,51065
0;21	0,10064	4; 0	0,27722	10,12	0,52753
1; 0	0,11002	4; 6	0,28866	11, 0	0,54415
1; 3	0,11900	4;12	0,29987	11,12	0,56052
1; 6	0,12766	4;18	0,31088	12, 0	0,57665
1; 9	0,13604	5; 0	0,32169	12,12	0,59256
1;12	0,14416	5; 6	0,33233	13 -	0,60826
1;15	0,15206	5;12	0,34279	14 -	0,63906
1;18	0,15976	5;18	0,35311	15 -	0,66914
1;21	0,16728	6; 0	0,36327	16 -	0,69856
2; 0	0,17464	6; 6	0,37326	17 -	0,72737
2; 3	0,18184	6;12	0,38318	18 -	0,75563
2; 6	0,18891	6;18	0,39294	19 -	0,78336
2; 9	0,19584	7; 0	0,40258	20 -	0,81061
2;12	0,20265	7; 6	0,41211	21 -	0,83741
2;15	0,20935	7;12	0,42153	22 -	0,86379
2;18	0,21595	7;18	0,43085	23 -	0,88977
2;21	0,22244	8; 0	0,44006	24 -	0,91538
3; 0	0,22884	8; 6	0,44919	25 -	0,94063
3; 3	0,23516	8;12	0,45822	26 -	0,96555

ad §. 115.

Tabula lapſus cometarum parabolici in ſolem.

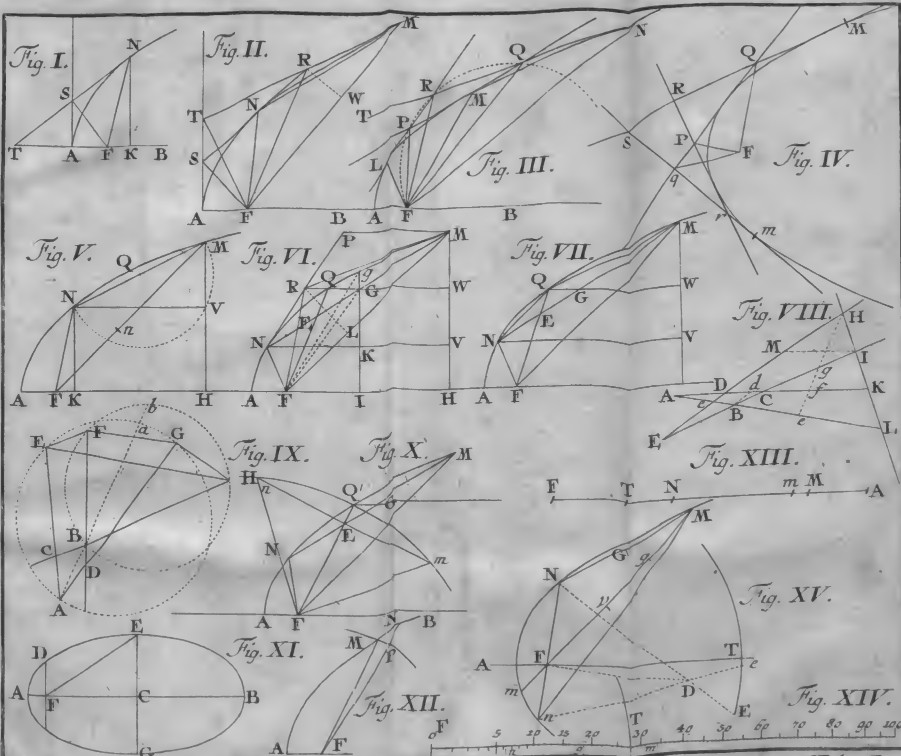
Tem-pus dies	Diſtant. a centro ſolis	Tem-pus dies	Diſtant. a centro ſolis	Tem-pus dies	Diſtant. a centro ſolis
26	0,96555	51	1,51300	76	1,97394
27	0,99015	52	1,53272	77	1,99122
28	1,01442	53	1,55230	78	2,00843
29	1,03846	54	1,57176	79	2,02555
30	1,06220	55	1,59111	80	2,04261
31	1,08567	56	1,61034	81	2,05960
32	1,10890	57	1,62945	82	2,07651
33	1,13188	58	1,64845	83	2,09336
34	1,15463	59	1,66735	84	2,11014
35	1,17717	60	1,68614	85	2,12685
36	1,19948	61	1,70482	86	2,14350
37	1,22159	62	1,72340	87	2,16009
38	1,24351	63	1,74188	88	2,17661
39	1,26523	64	1,76026	89	2,19307
40	1,28676	65	1,77855	90	2,20946
41	1,30812	66	1,79675	91	2,22580
42	1,32931	67	1,81485	92	2,24208
43	1,35032	68	1,83287	93	2,25829
44	1,37118	69	1,85080	94	2,27415
45	1,39188	70	1,86863	95	2,29056
46	1,41243	71	1,88639	96	2,30660
47	1,43282	72	1,90406	97	2,32260
48	1,45307	73	1,92165	98	2,33853
49	1,47318	74	1,93916	99	2,35441
50	1,49315	75	1,95659	100	2,37024
51	1,51300	76	1,97394	- -	- - -

Tabula lapſus cometarum elliptici in ſolem.

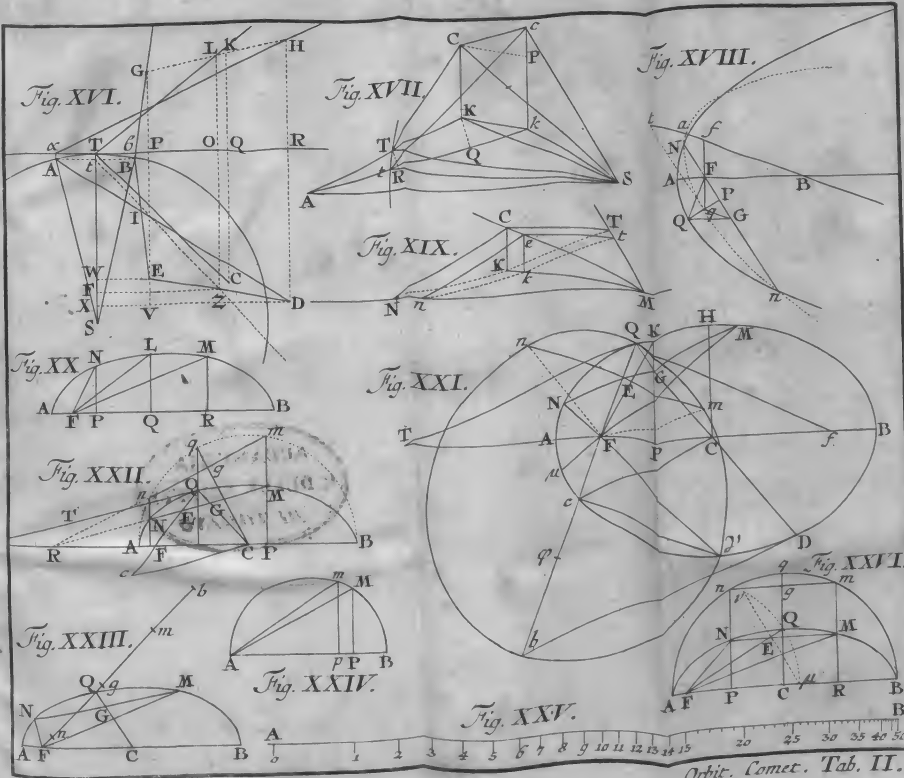
Tempus	Diſtant. a ſole	Tempus	Diſtant. a ſole	Tempus	Diſtant. a ſole
0	0	17	7008	34	9355
1	1270	18	7209	35	9434
2	1984	19	7399	36	9508
3	2562	20	7580	37	9577
4	3062	21	7753	38	9642
5	3513	22	7918	39	9699
6	3921	23	8075	40	9751
7	4298	24	8226	41	9799
8	4647	25	8368	42	9842
9	4973	26	8503	43	9880
10	5279	27	8631	44	9912
11	5567	28	8753	45	9939
12	5840	29	8869	46	9961
13	6100	30	8978	47	9978
14	6343	31	9081	48	9990
15	6575	32	9178	49	9998
16	6797	33	9269	50	10000
17	7008	34	9355	- -	- - -

Errata.

p. 7. §. 23. lin. 2. pro PMF lege QMF
p. 10. - - - lin. 7. pro FM—FH l. FM—FN
p. 15. §. 37. lin. 5. pro ſin FRM : (ſFRM + c) lege ſFMR : (ſFMR + c)
p. 15. §. 37. lin. 16. pro angulo FMN lege angulo RMN
p. 23. §. 52. lin. 10. pro Ducatur BD lege Ducatur Bd
p. 25. §. 56. lin. 11. pro NEF $= \frac{1}{2}$QEB lege NEF $= \frac{1}{2}$QFB
p. 26. - - lin. antipen. pro $\frac{1}{6}$GQ $= + \frac{1}{2}$FQ lege $\frac{1}{6}$GQ $+ \frac{1}{2}$FQ
p. 44. - - - lin. 11. pro $\sqrt{2}$QG $+ \frac{1}{3}$QG lege $\sqrt{2}$QG $+ \frac{4}{3}$QG
p. 47. §. 100. l. 5. pro m$\sqrt{2}$: $\sqrt{}$MF l. 2m$\sqrt{2}$: $\sqrt{}$MF
p. 53. - - - l. 3. pro 29 lege 34
p. 53. - - - l. 5. pro 22 lege 27
p. 58. - - - l. 11. pro QI lege GI
p. 65. §. 130. lin. 7. pro ſin NFK lege ſin NFH
p. 81. - - - l. 6. pro qh tangβ – pq tangα lege qh tangβ — pg tα



Orbit. Comet Tab. I.



Orbit. Comet. Tab. II.

ACCADEMIA
R.DELLE SCIENZE
DI TORINO